Chapitre 0

Procédés divers d'intégration

1. ***Intégration des fractions rationnelles*** ***1***
2. ***Intégration par changement de variables: Rationalisation*** ***5***
3. ***Différentielle binôme*** ***6***
4. ***Transformation des différentielles trigonométriques*** ***7***
5. ***Intégration des expressions contenant*** $\sqrt{a^2 - u^2}$ ***ou*** $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ ***8***

1. Intégration des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes entiers *x*.

Si le degré du numérateur est égal ou supérieur à celui du dénominateur, la fraction peut être ramenée à la somme d'un polynôme et d'une fraction en divisant le numérateur par le dénominateur.

$$\frac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{10x + 6}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 + \frac{4}{(1+x)^2} - \frac{10}{1+x}$$

Nous allons donc apprendre à intégrer des fractions dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur

1er Cas : Les facteurs dénominateurs sont tous du premier degré et non répétés

A chacun des facteurs linéaires non répétés tels que *x - a* correspond une fraction simple de la forme :

$$\frac{A}{x-a}$$

Où A est une constante.

EXEMPLE $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

$$x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2} = \frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A}{x(x-1)(x+2)}$$

Par identification:

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = -\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}$$

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx = -\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+c$$

REMARQUE

Une méthode rapide pour trouver les constantes A, B et C consiste à annuler les facteurs dans l'équation suivante:

$$2x+3 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

$$x=0 \Rightarrow 3=-2A \Rightarrow A=-\frac{3}{2}$$

$$x=1 \Rightarrow 5=3B \Rightarrow B=\frac{5}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow -1=-2\times-3\times C \Rightarrow C=-\frac{1}{6}$$

2e Cas : Les facteurs du dénominateur sont tous du premier degré et certains sont répétés

A chaque facteur linéaire répété tels que $(x - a)^n$ correspondent les n fractions simples:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(x-a)}$$

EXEMPLE

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)}$$

3e Cas : Le dénominateur contient des facteurs du second degré mais non répétés

A chaque facteur quadratique non répété tels que $x^2 + px + q$ correspond une fraction simple de la forme :

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

On intègre cette forme en complétant le carré parfait au dénominateur:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(4q - p^2\right)$$

puis en posant $u = x + \frac{p}{2}$

EXEMPLE

$$\frac{4}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+4} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}$$

$$\int \frac{4}{x\left(x^2+4\right)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+4}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + c$$

4e Cas : Le dénominateur contient des facteurs du second degré dont certains sont répétés

A chaque facteur quadratique répété n fois tels que x^2+px+q correspond les n fractions simples:

$$\frac{A_n x+B_n}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\frac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_1 x+B_1}{x^2+px+q}$$

EXEMPLE

$$\frac{2x^3+x+3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{3}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)}$$

$$J=\int\frac{2x^3+x+3}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\frac{3}{\left(x^2+1\right)^2}dx+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+Log\left(1+x^2\right)$$

$$\frac{3}{\left(x^2+1\right)^2}=3\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}=3\frac{1+x^2-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=3\left(\frac{1}{\left(x^2+1\right)}-\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right)$$

$$\int\frac{3}{\left(x^2+1\right)^2}dx=3\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx=3ArcTanx-3\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$J=3ArcTanx+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+Log\left(1+x^2\right)-3\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$u=x\Rightarrow du=dx; \qquad dv=\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}ArcTanx$$

$$J=3ArcTanx+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+Log\left(1+x^2\right)-3\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}ArcTanx\right)$$

$$J=\frac{3}{2}ArcTanx+Log\left(1+x^2\right)+\frac{3x-+1}{2\left(x^2+1\right)}$$

2. Intégration par changement de variables: Rationalisation

Différentielle contenant seulement des puissances fractionnaires de x

On rationalise cette expression au moyen de la substitution $x = t^n$, n étant le plus petit dénominateur commun des exposants fractionnaires de x.

EXEMPLE

$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}.$$

On pose $x = t^4 \Rightarrow$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \frac{t^2}{1+t^3}4t^3dt = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}Log\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)+c$$

Différentielle contenant seulement des puissances fractionnaires de a+bx

On rationalise cette expression au moyen de la substitution $a+bx = t^n$, n étant le plus petit dénominateur commun des exposants fractionnaires de a+bx.

EXEMPLE

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}$$

En posant $1+x = t^2$

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}} = \int \frac{2dt}{t^2+1} = 2ArcTan(t)+c = 2ArcTan\left((1+x)^{1/2}\right)+c$$

---

3. Différentielle binôme

Une différentielle binôme est de la forme :

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

On peut toujours réduire cette différentielle à la forme

$$x^m\left(a+bx^n\right)^{\frac{r}{s}} dx$$

dans laquelle m, n, r, s sont des entiers et où n est positif.

En effet si m et n sont des fractions, choisissons α de telle sorte que mα et nα soient des nombres entiers. (α PPCM des dénominateurs de m et de n).

Posons $x=t^{\alpha}$. $\Rightarrow\ x^m\left(a+bx^n\right)^{\frac{r}{s}} dx = at^{m\alpha+\alpha-1}\left(a+bt^{n\alpha}\right)^p$

Nous voyons que les exposants m et n de x sont remplacés par des entiers. De même :

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = x^{m+np}\left(ax^{-n}+b\right)^p$$

montre que quel que soit le signe de n, l'exposant de x peut être rendu positif.

Différentielle binôme de la forme

$$x^m\left(a+bx^n\right)^{\frac{r}{s}} dx$$

dans laquelle m,n,r,s sont des entiers et où n est positif.

1er Cas : $\dfrac{m+1}{n} = entier \Rightarrow$ on pose $a+bx^n = t^s$

EXEMPLE

$$\int \frac{x^3}{\left(a+bx^2\right)^{3/2}}dx$$

Ici $m=3$, $n=2$, $r=3$ *et* $s=2$. $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{4}{2}=2=entier$.

On pose $a+bx^2 = t^2 \Rightarrow\ x=\left(\dfrac{t^2-a}{b}\right)^{1/2} \Rightarrow\ dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{b\left(t^2-a\right)}}$

$$\int \frac{x^3}{\left(a+bx^2\right)^{3/2}}dx = \int\left(\frac{t^2-a}{b}\right)^{3/2} \times \frac{1}{t^3} \times \frac{tdt}{b^{1/2}\left(t^2-a\right)^{1/2}} = \frac{1}{b^2} \times \int \frac{\left(t^2-a\right)}{t^2}dt = \frac{1}{b^2}\left(t+\frac{a}{t}\right)+c$$

$$\int \frac{x^3}{\left(a+bx^2\right)^{3/2}}dx = \frac{1}{b^2}\left(\sqrt{a+bx^2}+\frac{a}{\sqrt{a+bx^2}}\right)+c$$

2ème Cas : $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s} = entier\ ou\ 0 \Rightarrow$ on pose $a+bx^n = t^s x^n$

EXEMPLE

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

Ici m =-4, n=2, r=-1, s=2 $\Rightarrow$ On pose

$1+x^2 = t^2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2-1}$ et $t = \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow dx = -\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^{3/2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = -\int\left(t^2-1\right)dt = t-\frac{t^3}{3}+c = \frac{\left(2x^2-1\right)\left(1+x^2\right)^{1/2}}{2x^3}+c$$

4. Transformation des différentielles trigonométriques

Une différentielle trigonométrique rationnelle en sin(u) et cos(u) peut être transformée en une autre expression différentielle rationnelle par la substitution :

$$Tan\left(\frac{u}{2}\right) = t$$

ou par les substitutions :

$$\sin(u) = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos(u) = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \mathrm{Tan}(\mathrm{u}) = \frac{2t}{1-t^2}; \quad du = \frac{2dt}{1+t^2}$$

EXEMPLE

$$\int \frac{dx}{5+4\sin 2x}$$

Posons $\sin(2x)=\dfrac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \quad du=\dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{5+4\sin 2x}=\int \frac{dt}{5t^2+8t+5}=\frac{1}{3}ArcTan\left(\frac{5t+4}{3}\right)+c=\frac{1}{3}ArcTan(u)+c$$

---

5. Intégration des expressions contenant $\sqrt{a^2-u^2}$ ou $\sqrt{u^2\pm a^2}$

Quand $\sqrt{a^2-u^2}$ se présente, on pose	$u=a\sin(z)$
Quand $\sqrt{u^2+a^2}$ se présente, on pose	$u=aTan(z)$
Quand $\sqrt{u^2-a^2}$ se présente, on pose	$u=\dfrac{a}{\cos^2(z)}$

EXEMPLE 1

MÉTHODE 1

- $I=\int\sqrt{1+x^2}\,dx$

  Posons $u=\sqrt{1+x^2}$ et $dv=dx$

  $$I=\int\sqrt{1+x^2}\,dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

  $$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\sqrt{1+x^2}\,dx-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=I-ArcSinh(x)$$

  $$I=x\sqrt{1+x^2}-I+ArcSinh(x)$$

  $$2I=x\sqrt{1+x^2}+ArcSinh(x)$$

  $$I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+ArcSinh(x)\right)$$

MÉTHODE 2

- $I=\int\sqrt{1+u^2}\,du$

  Posons $u=Tan(x)$

$$I=\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\right)dx=K+J$$

$$K=\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2}{1-t^2}dt=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=Log(1+t)-Log(1-t)$$

$$K=Log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$J=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{8t^2}{\left(1-t^2\right)^3}dt$$

$$\frac{8t^2}{\left(1-t^2\right)^3}=\frac{1}{(t+1)^3}-\frac{1}{(t-1)^3}-\frac{1}{2(t-1)^2}-\frac{1}{2(t+1)^2}+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}$$

$$J=\int\frac{8t^2}{\left(1-t^2\right)^3}dt=\frac{1}{2}\left(\frac{2\left(t+t^3\right)}{\left(t^2-1\right)^2}+Log(t-1)-Log(t+1)\right)$$

$$J=\frac{1}{2}\left(\frac{2\left(t+t^3\right)}{\left(t^2-1\right)^2}+Log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right)$$

$$K+J=\frac{1}{2}\left(\frac{2\left(t+t^3\right)}{\left(t^2-1\right)^2}\right)+\frac{1}{2}Log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{2\left(t+t^3\right)}{\left(t^2-1\right)^2}\right)+\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

EXEMPLE 2

- $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}$

On pose $x=a\sin(z)$

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3}=\int\frac{a\cos(z)dz}{a^3\cos^3(z)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{\cos^2(z)}=\frac{Tan(z)}{a^2}+c=\frac{1}{a^2}\frac{\sin(z)}{\cos(z)}+c$$

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + c$$

EXEMPLE 3

- $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$

On pose $u = 2x \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+9}}$$

Posons $u = 3Tan(z)$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+9}} = \int \frac{3dz}{\cos^2(z) \times 3Tan(z) \times \sqrt{9Tan^2(z)+9}} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sin(z)}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sin(z)} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}Log(t) + c = \frac{1}{3}Log\left(\frac{-3+\sqrt{9+u^2}}{u}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3}Log\left(\frac{-3+\sqrt{9+4x^2}}{2x}\right) + c$$