Chapitre XI

Intégrales Généralisées ou Impropres

1. DÉFINITION DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE **1**

2. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE PREMIÈRE ESPÈCE **2**

2.1. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE FONCTIONS PARTICULIÈRES 2

2.1.1. Intégrale géométrique ou exponentielle 2

2.1.2. Intégrale puissance première espèce 3

2.2. CRITÈRES DE CONVERGENCE POUR LES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE PREMIÈRE ESPÈCE 3

2.2.1. Critère de Comparaison 3

2.2.2. Critère du quotient 3

2.2.3. Théorème 1(de convergence) 4

2.3. INTÉGRALES ABSOLUMENT CONVERGENTES 4

3. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE SECONDE ESPÈCE **4**

3.1. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE FONCTIONS PARTICULIÈRES 6

3.2. CRITÈRES DE CONVERGENCE POUR LES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE SECONDE ESPÈCE 6

3.2.1. Critère de Comparaison 6

3.2.2. Critère du quotient 6

3.3. INTÉGRALES ABSOLUMENT CONVERGENTES 7

4. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE TROISIÈME ESPÈCE **7**

1. Définition de l'intégrale généralisée

- L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite intégrale généralisée ou impropre de première espèce, si:

  $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ ou les deux

- L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite intégrale généralisée ou impropre de deuxième espèce, si:

  $f(x)$ n'est pas bornée en un ou plusieurs points de l'intervalle [a, b] ; de tels points sont appelés singularités de f(x).

- L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite intégrale impropre de troisième espèce si elle est à la fois de première et de deuxième espèce.

EXEMPLES

1) $\int_{0}^{+\infty} x^2 dx$ 2) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{x-4}$ 3) $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$

2. Intégrales Généralisées de Première Espèce

Définition 1

Soit f(x) une fonction bornée et intégrable sur tout intervalle fini [a, b]. Alors par définition:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

Si cette limite existe l'intégrale est dite convergente ou a un sens, si elle n'existe pas, elle est dite divergente ou n'a pas de sens

Définition 2

De même par définition

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx$$

L'intégrale est dite convergente ou divergente, selon que la limite existe ou non.

EXEMPLE $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big]_{1}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + 1 = 1 \Rightarrow I$ est convergente.

Définition 3

D'une manière semblable on définit:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx + \int_{t}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{où t est un nombre réel}$$

Si ces deux intégrales sont toutes les deux convergentes, I est convergente.

Si l'une d'elles diverge et l'autre converge, I diverge.

Si elles sont toutes les deux divergentes, mais leur somme converge, I converge.

2.1. Intégrales généralisées de fonctions particulières

2.1.1. Intégrale géométrique ou exponentielle

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ où α est une constante est dite intégrale géométrique. On démontre facilement que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \begin{cases} convergente & si \quad \alpha > 0 \\ divergente & si \quad \alpha \le 0 \end{cases}$

2.1.2. Intégrale puissance première espèce

L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ où p est une constante et a>0 est dite intégrale puissance. On démontre facilement que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} convergente & si \quad p > 1 \\ divergente & si \quad p \le 1 \end{cases}$

2.2. Critères de convergence pour les intégrales généralisées de première espèce

Les critères suivants sont donnés pour le cas où une des bornes est +∝. Des critères similaires existent quand l'une des bornes d'intégration est -∝, (un changement de variable x = -x change la borne en +∝. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons que f(x) est continue, donc intégrable sur tout intervalle fini [a, b].

2.2.1. Critère de Comparaison

A) CONVERGENCE

Considérons une fonction g(x) vérifiant 0 ≤ f(x) ≤ g(x) pour tout x ≥ a.

Alors si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est convergente, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente aussi.

DIVERGENCE

Considérons une fonction g(x) vérifiant 0 ≤ g(x) ≤ f(x) pour tout x ≥ a.

Alors si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est divergente, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente aussi.

2.2.2. Critère du quotient

Si f(x) ≥ 0 et g(x) ≥ 0 pour tout x ≥ a, et si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

1. Si L ≠ 0 et L ≠ +∝ Alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ont même nature.
2. Si L = 0. Alors, si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est convergente, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge aussi.
3. Si L = +∝. Alors si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est divergente, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge aussi.

2.2.3. Théorème 1(de convergence)

Soit $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = L$. Alors :

1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si p > 1 et si L est fini

2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge si p ≤ 1 et si L ≠ 0(L peut être infinie).

REMARQUE

Des critères similaires peuvent être énoncés en utilisant $g(x) = e^{-tx}$ comme fonction de comparaison.

2.3. Intégrales absolument convergentes

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est dite absolument convergente, si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge.

Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge mais que $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ diverge, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est alors dite semi-convergente.

Théorème 2

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

3. Intégrales Généralisées de Seconde Espèce

Définition 1

Soit f(x) une fonction non bornée seulement au point a. de l'intervalle fini [a, b]. Alors par définition:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Si cette limite existe l'intégrale est dite convergente ou a un sens, si elle n'existe pas, elle est dite divergente ou n'a pas de sens

Définition 2

De même par définition

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

L'intégrale est dite convergente ou divergente, selon que la limite existe ou non.

REMARQUE

Si f(x) est non bornée seulement en un point c. de l'intervalle fini [a, b]. Alors par définition :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

On peut étendre ces définitions aux cas où f(x) est non bornée en deux ou plusieurs points de l'intervalle [a, b].

3.1. Intégrales généralisées de fonctions particulières

1. L'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ où p est une constante est dite intégrale puissance de seconde espèce. Elle converge si p < 1 et diverge si p ≥ 1

2. De même $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge si p < 1 et diverge si p ≥ 1

3.2. Critères de convergence pour les intégrales généralisées de seconde espèce

Les critères suivants sont donnés pour le cas où f(x) est non bornée seulement au point a de l'intervalle [a, b]. Des critères similaires existent si f(x) est non bornée seulement au point b de l'intervalle [a, b].

3.2.1. Critère de Comparaison

A) CONVERGENCE

Considérons une fonction g(x) vérifiant 0 ≤ f(x) ≤ g(x) pour tout $x \in [a,b]$.

Alors si $\int_a^b g(x)dx$ est convergente, $\int_a^b f(x)dx$ est convergente aussi.

EXEMPLE $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ converge car $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ et $0 < \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}; \forall x > 1$

B) DIVERGENCE

Considérons une fonction g(x) vérifiant 0 ≤ g(x) ≤ f(x) pour tout $x \in [a,b]$.

Alors si $\int_a^b g(x)dx$ est divergente, $\int_a^b f(x)dx$ est divergente aussi.

EXEMPLE $\int_3^6 \frac{Logx}{(x-3)^4}dx$ diverge car $\int_3^6 \frac{dx}{(x-3)^4}$ diverge et $\frac{Logx}{(x-3)^4} > \frac{1}{(x-3)^4}; \forall x > 0$

3.2.2. Critère du quotient

Si f(x) ≥ 0 et g(x) ≥ 0 pour tout x ≥ a, et si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

1. Si L ≠ 0 et L ≠ +∝ Alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ ont même nature.

2. Si L = 0 Alors, si l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ est convergente, $\int_a^b f(x)dx$ converge aussi.

3. Si L = $+\infty$ Alors si l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$ est divergente, $\int_a^b f(x)dx$ diverge aussi.

Théorème 3

Soit $\lim_{x \to a} (x-a)^p f(x) = L$. Alors :

1. $\int_a^b f(x)dx$ converge si p < 1 et si L est fini

2. $\int_a^b f(x)dx$ diverge si p $\geq$ 1 et si L $\neq$ 0(L peut être infinie).

EXEMPLE 1 $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ converge puisque $\lim_{x \to 1^+} (x-1)^{1/2} f(x) = \frac{1}{2}$

EXEMPLE 2 $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ diverge puisque $\lim_{x \to 3^-} (3-x) f(x) = \frac{1}{\sqrt{10}}$

3.3. Intégrales absolument convergentes

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite absolument convergente, si $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.

Si $\int_a^b f(x)dx$ converge mais que $\int_a^b |f(x)|dx$ diverge, $\int_a^b f(x)dx$ est alors dite semi-convergente.

Théorème 4

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

4. Intégrales Généralisées de Troisième Espèce

Les intégrales impropres de troisième espèce, peuvent être exprimées en termes des intégrales impropres de première et de seconde espèce, et par suite on résout le problème de leur convergence ou de leur divergence en utilisant les résultats déjà énoncés.