Chapitre 1

Les Vecteurs

1. Définition d'un point.

1.1 Points et vecteurs liés

Un nombre réel peut être représenté par un point sur un axe

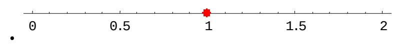


Figure 1

Un couple ordonné de nombres (x, y) peut être représenté par un point d'un plan.

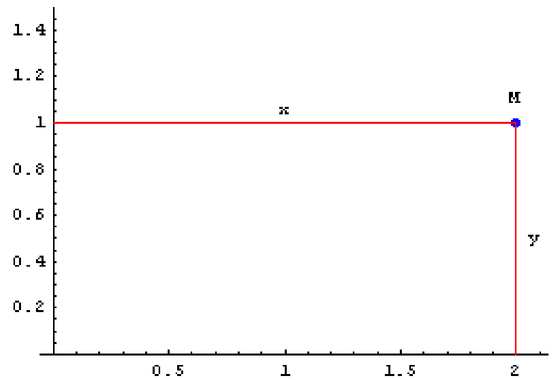


Figure 2

Un triplet ordonné de nombres (x, y, z) peut être représenté par un point de l'espace.

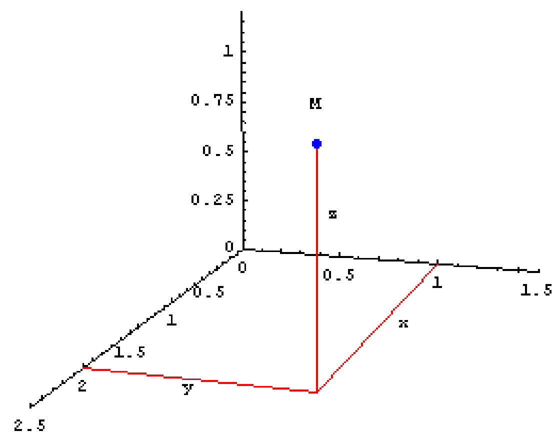


Figure 3

On peut généraliser la définition d'un point $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ sans qu'on puisse représenter géométriquement ce point.

1.2 Addition dans R^n

Soit $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ deux points de R^n. On définit la somme de ces deux points par: $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$

Posons $0 = (0, 0, ..., 0)$, $-A = (-a_1, -a_2, ..., -a_n)$, démontrer les propriétés suivantes :

$A + B = B + A$ $\quad$ $(A + B) + C = A + (B + C)$

$0 + A = A + 0$ $\quad$ $A + (-A) = 0$

1.3 Multiplication d'un point par un réel

Soit $A = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ et λR. On définit: $\lambda A = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$

Démontrer les propriétés suivantes

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
- $(-1) \times A = -A$

Exemple

- $A = (2, 9); B = (4, 5) \Rightarrow A+B = (6, 14)$
- $A = -(3,-4); B = (-3, 8) \Rightarrow A+B = (-6, 12)$

2. Vecteurs liés.

2.1 Vecteurs liés

Un vecteur lié est un couple ordonné de points A et B de R^n noté (A, B)

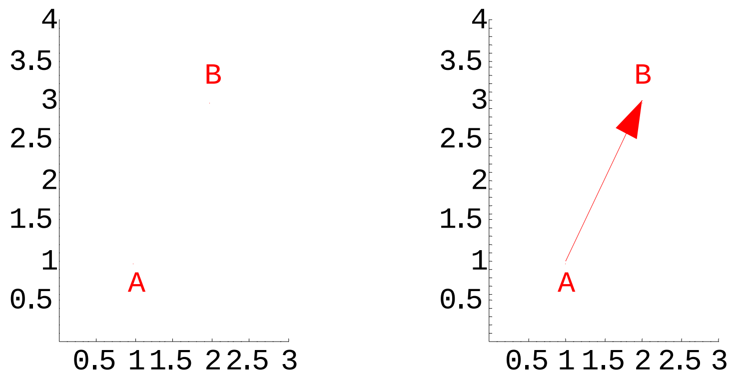
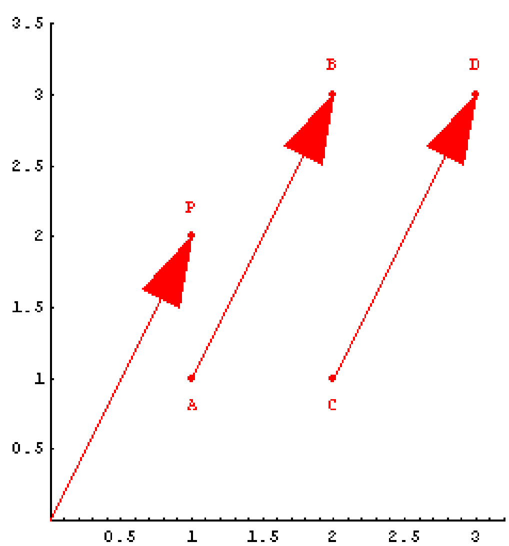


Figure 4

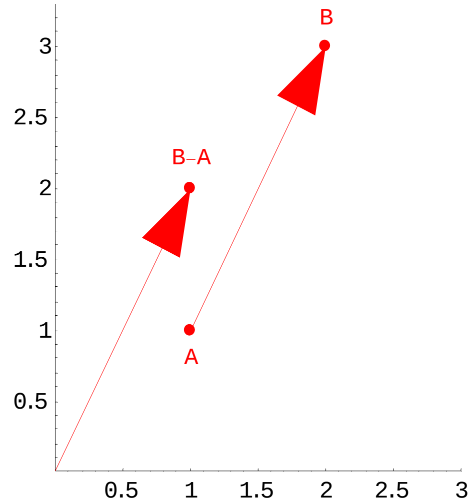
2.2 Vecteurs équivalents

Deux vecteurs liés (A,B) et (C,D) sont dits équivalents si et seulement si :
B - A = D - C

L'application canonique de R^n dans l'ensemble des vecteurs liés dont l'origine est le point O et qui à tout point P de R^n associe le vecteur (O,P) est une bijection. Dorénavant nous confondrons un point P=(a,b) au vecteur (O,P)=(a,b).



Remarque : Le vecteur B-A est le vecteur dont l'origine est le point O et dont l'extrémité est le point B-A



2.3 Vecteurs parallèles

Deux vecteurs liés (A,B) et (C,D) sont dits parallèles si un nombre k existe tel que :

B - A = k (D - C)

Si k> 0 on dit qu'ils ont même sens

Si k< 0 on dit qu'ils sont de sens opposés

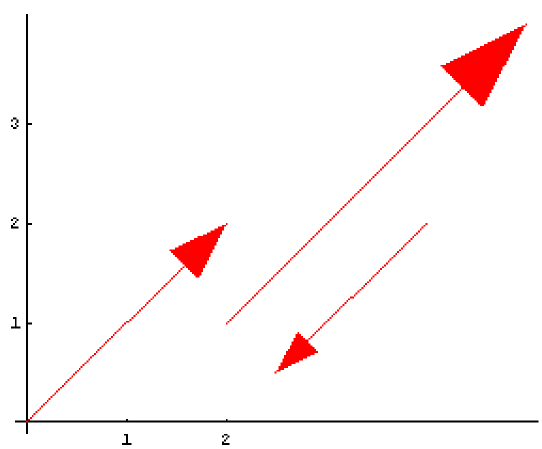


Figure 5

2.4 Produit scalaire

2.4.1 Produit scalaire

Soit $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ deux points de R^n. Le produit scalaire de A par B est le nombre réel: $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$

Démontrer :

- A . B = B . A
- A . (B + C) = A . B + A . C
- (λA).B = λ (A . B) = A.(λB)

2.4.2 Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs A et B sont dit orthogonaux si et seulement si A . B = 0

2.5 Norme d'un vecteur

2.5.1 Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur A, notée $\|A\|$, est le réel positif définit par

$$\|A\| = \sqrt{A.A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Démontrer

$$\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

2.5.2 Distance

La distance entre deux vecteurs A et B est définie par

$$\|A - B\| = \sqrt{(A - B)(A - B)}$$

2.5.3 Cercle et disque

L'équation d'un cercle centré en P et de rayon a>0 est :

$$\|X - P\| = r$$

Si $X = (x, y)$ et $P = (a, b) \Rightarrow$ L'équation du cercle de centre P et de rayon r est :

$$\|X - P\| = r \Rightarrow \sqrt{\|(x, y) - (a, b)\|} = \sqrt{\|(x - a, y - b)\|} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

L'équation d'un disque centré en P et de rayon a>0 est: $\|X - P\| < a$

2.6 Projection orthogonale

Soit A et B deux vecteurs liés de R^n ; B ≠ 0. La projection orthogonale de A sur B est le vecteur P vérifiant:

$$\exists k \in R^+ \quad / \quad P = kB$$

$$(A - P).B = 0$$

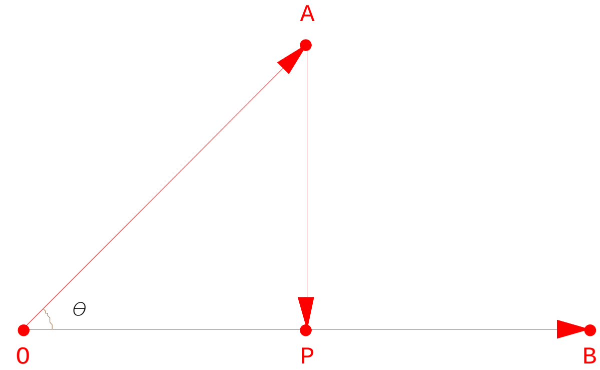


Figure 6

CALCUL DE K

$$(A-P).B = 0 \Rightarrow A.B = P.B = kB.B \Rightarrow k = \frac{A.B}{B.B}$$

Soit $\theta = \widehat{AOB}$

$$\cos\theta = \frac{\|P\|}{\|A\|} = \frac{\sqrt{P.P}}{\sqrt{A.A}} = \frac{\sqrt{k^2\ B.B}}{\sqrt{A.A}} = k \times \frac{\sqrt{B.B}}{\sqrt{A.A}} = \frac{A.B}{B.B} \times \frac{\sqrt{B.B}}{\sqrt{A.A}} = \frac{A.B}{\|A\|\ \|B\|}$$

$$\Rightarrow A.B = \|A\|\|B\|\cos\theta$$

Conclusion: $k = \frac{A.B}{B.B}$ et $A.B = \|A\|\|B\|\cos\theta$

2.7 Equation paramétrique d'une droite

> Une droite de R^n passant par un point A et parallèle à un vecteur v a pour équation:
>
> M = A + t v
>
> La direction de cette droite est le vecteur *v*

Une droite de R^n passant par deux point A et B a pour équation:

M = A + t (B - A) ou M = A + t (A - B)

La direction de cette droite est le vecteur A - B ou le vecteur B – A

Lorsque $0 \le t \le 1$, M = A + t (B - A) est l'équation du segment [A,B]

2.8 Equation cartésienne d'un plan

Un plan passant par un point A et admettant N comme vecteur normal a pour équation:

N. (X - A) = 0 ou N.X = N.A

Part 2

3. Dérivée d'un vecteur

3.1 Courbe paramétrée

Soit I = [a, b] de R.. L'application qui à tout point t de I associe un vecteur lié X(t) de R^n est un arc paramétré.

$$I \longrightarrow R^n;$$

$$t \longrightarrow X(t)$$

3.2 Vitesse et vecteur vitesse

Si X(t) est une courbe paramétrée, le vecteur X'(t) est dit vecteur vitesse au temps t. C'est un vecteur lié à l'origine et parallèle au vecteur tangent à la courbe au temps t.

La quantité

$$v(t) = \|X'(t)\|$$

est dite la vitesse en ce temps.

3.3 Accélération et vecteur accélération

Si $X(t)$ est une courbe paramétrée, le vecteur $X''(t)$ est dit vecteur accélération au temps t. La quantité $a(t) = \|X''(t)\|$ est dite accélération en ce temps.

3.4 Règles de dérivation

$(X(t) + Y(t))' = X'(t) + Y'(t)$

$(\lambda X(t))' = \lambda X'(t)$

$(X(t).Y(t))' = X'(t).Y(t) + X(t).Y'(t)$

$(f(t)Y(t))' = f'(t)Y(t) + f(t)Y'(t)$

4. Longueur d'une courbe

La longueur L d'une courbe X(t) est par définition:

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b v(t)dt = \int_a^b \|X'(t)\| dt$$

On peut donc noter $ds = \|X'(t)\| dt$

4.1 Courbe donnée en coordonnées cartésiennes

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \|X'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + \ldots + x_n'^2(t)}dt$$

Exemple 1

Longueur du demi-cercle $y=\sqrt{1-x^2}$

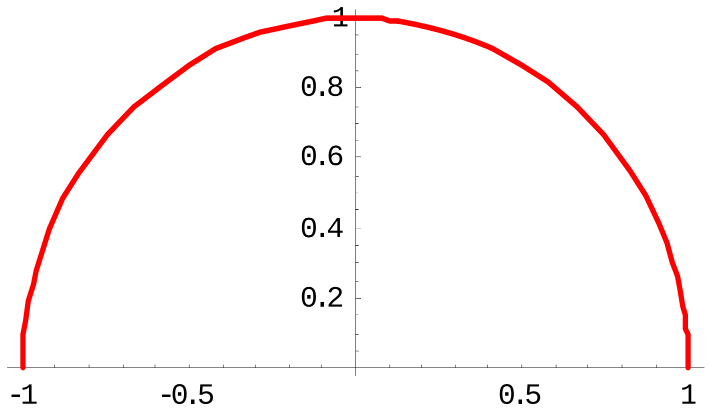


Figure 7

$$L=\int_{-1}^{+1}\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\left(Arc\sin 1-Arc\sin 0\right)=2\frac{\pi}{2}=\pi$$

4.2 Courbe donnée en coordonnées polaires

DÉFINITION

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$0\le\theta\le 2\pi$

REPRÉSENTATION

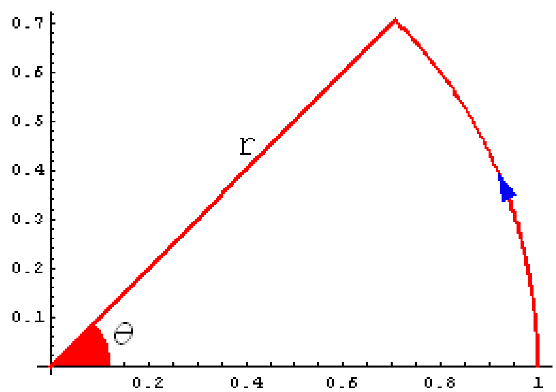


Figure 8

$$L=\int_a^b ds=\int_a^b\left\|X'(t)\right\|dt=\int_a^b\sqrt{r'^2(t)+r^2(t)\theta'^2(t)}dt$$

4.3 Courbe donnée en coordonnées cylindriques

DÉFINITION

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$

CoorCylindrique.gif

REPRÉSENTATION

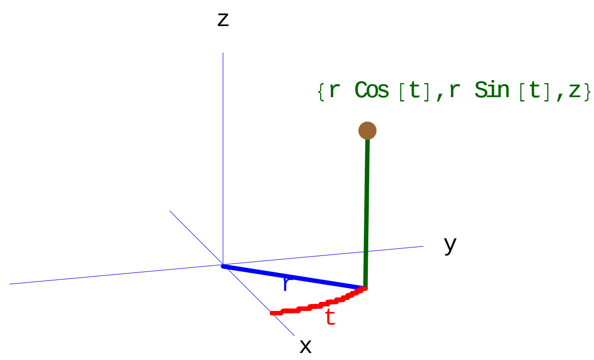


Figure 9

$$L = \int_a^b \|X'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{r'^2(t) + r^2(t)\theta'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

4.4 Courbe donnée en coordonnées sphériques

DÉFINITION

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta;$$
$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta;$$
$$z = \rho\cos\varphi$$
$$0 \le \varphi \le \pi$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \rho$$

spheriques.gif

REPRÉSENTATION

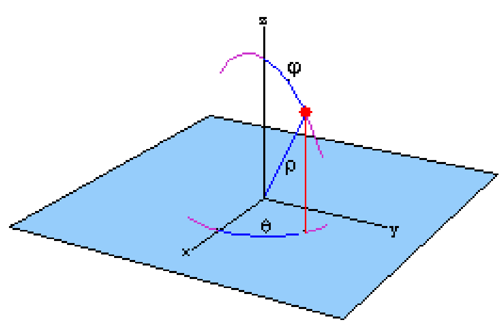


Figure 10

$$L = \int_a^b \|X'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t)\varphi'^2(t) + \rho^2(t)\theta'^2(t)\sin^2\varphi(t)}\,dt$$

Chapitre I : Les Vecteurs