Chapitre II

Fonctions de Plusieurs variables

1. DÉFINITIONS **2**

1.1 NORMES DANS R^N 2
1.2 FONCTIONS NUMÉRIQUES 2
1.3 GRAPHE D'UNE FONCTION 2
1.4 SURFACE ET COURBE DE NIVEAU 3

2. LIMITE ET CONTINUITÉ **4**

2.1 LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT. 4
2.2 CONTINUITÉ 5
2.3 EXEMPLES 5
2.4 CRITÈRE DE CAUCHY 5
2.5 LEMME 7

3. DÉRIVÉES PARTIELLES, GRADIENTS **8**

3.1 DÉRIVÉE PARTIELLE 8
3.2 GRADIENT 8

4. DIFFÉRENTIABILITÉ ET GRADIENTS **9**

4.1 INTRODUCTION 9
4.2 DÉFINITION (DIFFÉRENTIABILITÉ) 10
4.2.1 Théorème 1 ..... *10*
4.2.2 Théorème 2 ..... *10*
4.3 DÉFINITION (DIFFÉRENTIELLE) 12

5. DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEURES **12**

5.1 DÉFINITION 12
5.1.1 Théorème (dit de Schwartz) *13*

THÉORÈME DES ACCROISSEMENT FINIS **14**

Part 1

1. Définitions

1.1 Normes dans R^n

Nous savons qu'on peut munir R^n de trois normes équivalentes suivantes:

$$N_1(X) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad ;$$

$$N_2(X) = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \dots x_n^{\ 2}} \quad ;$$

$$N_3(X) = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Nous considérons R^n muni de la norme N_2 dite norme Euclidienne que nous noterons

$$\forall X \in R^n \qquad \|X\| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \dots x_n^{\ 2}}$$

1.2 Fonctions numériques

Soit A une partie de l'espace R^n . On appelle fonction numérique de n variables définie sur A, toute application f de A dans R.

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \to & R \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & & \to & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

EXEMPLES

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad f : R^2 \to R$$

$$f(x, y, z) = x^y \quad f : R^{*+} \times R^2 \to R$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad f : R^2 - \{(0,0)\} \to R$$

1.3 Graphe d'une fonction

f une fonction numérique à n variables définie sur une partie A de R^n .
L'ensemble des points à n+1 dimensions de la forme:

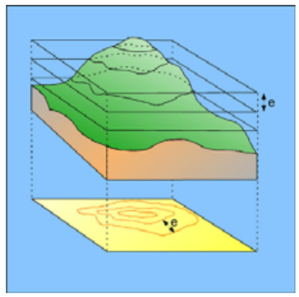
$$(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in R^{n+1}$$

s'appelle graphe de f.

1.4 Surface et Courbe de Niveau

> Les surfaces et les courbes de niveau sont obtenues en posant
> $f(x_1, x_2, ..., x_n) = consante$

Si f est une fonction à deux variables, une courbe de niveau représente l'intersection de la surface avec le plan z = constante.



EXEMPLE 1

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3$$

est l'équation du cercle d'intersection de la **sphère** avec le plan z=1.

Cette équation est aussi celle de la projection de cette intersection sur le plan x'Ox..

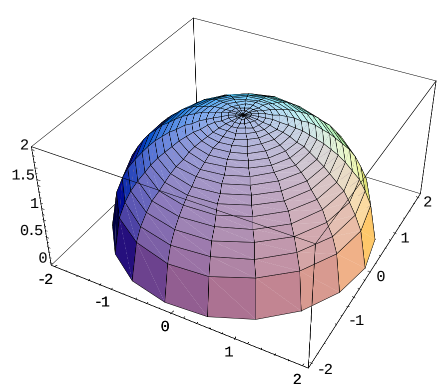


Figure 1

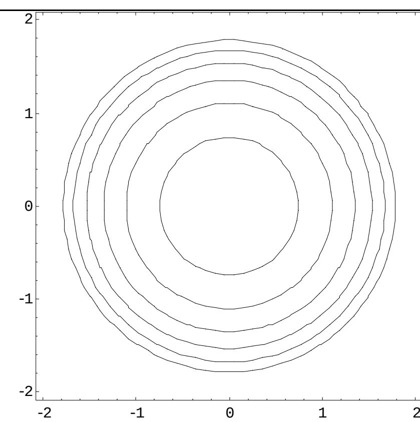


Figure 2

EXEMPLE 2

$$f(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}\left(\cos x^2+\sin y^2\right)$$

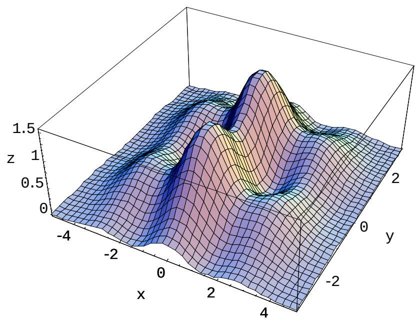


Figure 3

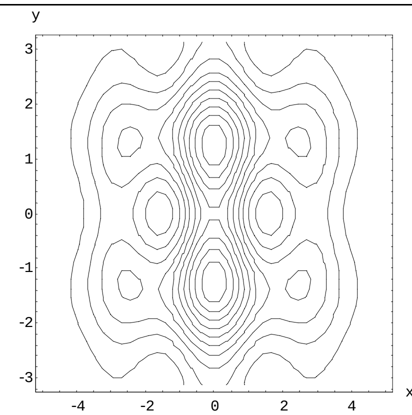


Figure 4

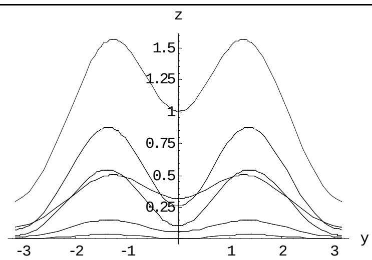


Figure 5

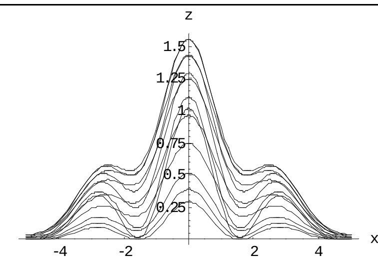


Figure 6

2. Limite et continuité

2.1 Limite d'une fonction en un point.

Soit f une fonction numérique à n variables définie sur une partie A de R^n .
Notons $X=(x_1,x_2,...,x_n)$

On dit que f(X) tend vers une limite l lorsque $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ tend vers $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\alpha>0 \;\; tel\ que\ \|X\text{-}a\|<\alpha\Rightarrow|f(X)-l|<\varepsilon$$

Autrement dit

$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists\alpha>0 \;\; tel\ que\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2}<\alpha\Rightarrow|f(X)-l|<\varepsilon$ On note

$$\lim_{X\to a}f(X)=l$$

2.2 Continuité

Soit $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ une fonction numérique à n variables définie sur une partie A de R^n. On dit que f est continue au point $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ si et seulement si

$\lim_{X \to a} f(X) = f(a)$

2.3 Exemples

Les fonctions suivantes ont-elles une limite lorsque (x, y) tends vers (0,0)?

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \quad f(x,y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

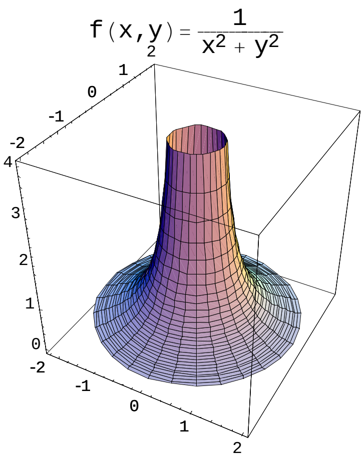


Figure 7

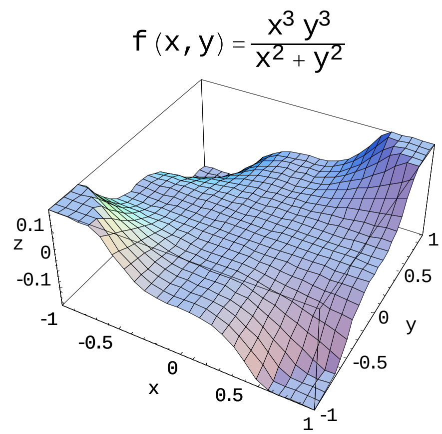


Figure 8

2.4 Critère de Cauchy

Soit A $\subseteq$ R^n et f: A $\to$ R. Soit a un point adhérent à A . Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $\lim_{X \to a} f(X) = l$

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que* $\forall (X,Y) \in A \times A$ *et* $\|X - a\| < \delta, \|Y - a\| < \delta \Rightarrow |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$

En effet:

Rappelons que : $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, et que $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$

(a) $\Rightarrow$ (b)

$$\lim_{X \to a} f(X) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;\; tel\ que \;\; \|X-a\| < \delta \;\; \Rightarrow |f(X)-l| < \varepsilon$$

De même

$$\lim_{X \to a} f(X) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ tel\ que\ \ \|Y\text{-}a\| < \delta \ \ \Rightarrow |f(Y)\text{-}l| < \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{X \to a} f(X) = l \Leftrightarrow \ \forall 2\varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ tel\ que\ \|X - a\| < \delta \quad et\ \ \|Y - a\| < \delta$$

$$\Rightarrow |\mathrm{f(X)\text{-}f(Y)}| < |f(X) - l| + |f(Y) - l| < 2\varepsilon$$

c.q.f.d

(b) $\Rightarrow$ (a)

Supposons donc que (b) soit vérifié. a étant un point adhérent à A

$$\forall B(a, \frac{1}{n}) \ \Rightarrow \ \ B(a, \frac{1}{n}) \bigcap A \neq \phi \Rightarrow \exists\, X_n \in A \text{ tel que } \ \|X_n - a\| < \frac{1}{n}.$$

Cette suite converge évidement vers a. Prenons N tel que $1/N < \delta/2$. On a ainsi:

$$\forall m, n > N \quad \|X_n - X_m\| \leq \|X_n - a\| + \|X_m - a\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < \delta$$
$$\Rightarrow |f(X_n) - f(X_m)| < \varepsilon$$

Ainsi la suite $f(X_n)$ est une suite de Cauchy convergente dans R. Soit l sa limite. Montrons que l est aussi la limite de f(X) lorsque $X \to a$. Nous devons donc montrer que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \ \text{ tel que } \ \|\mathrm{X\text{-}a}\| < \delta_1 \quad \Rightarrow |f(X) - l| < \varepsilon$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = a$ on a:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \ \|\mathrm{X_n\text{-}a}\| < \delta \quad \Rightarrow |f(X_n) - l| < \varepsilon$$

Posons $\delta_1 = \dfrac{\delta}{2}$

$$\|X - X_n\| \leq \|X - a\| + \|X_n - a\| < \delta \overset{d'après (b)}{\Rightarrow} |f(X) - f(X_n)| < \varepsilon$$

Ainsi

$|f(X) - l| < |f(X) - f(X_n)| + |f(X_n) - l| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$ **c.q.f.d.**

EXEMPLES

- $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$ continue à l'origine

- $\begin{cases} g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ g(0,0) = 0 \end{cases}$ n'est pas continue à l'origine.

2.5 Lemme

> Si une fonction de n variables est continue en un point $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, alors elle est continue par rapport à chacune de ses variables x_i en ce point.

C'est à dire $\lim\limits_{x_i \to a_i} f(X) = f(a)$

REMARQUE 7

La réciproque de ce lemme est fausse.

EXEMPLE

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy^3+x^3y}{x^4+y^4} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue par rapport à chacune de ses variables au point (0,0) car f(x,0) et f(0,y) sont deux fonctions constantes donc continues. Cependant f n'est pas continue au point (0,0).

$$f(my,y) = \frac{my^4+m^3y^4}{m^4y^4+y^4} = \frac{m+m^3}{m^4+1} \Rightarrow \lim_{y\to 0} f(my,y) \neq 0 = f(0,0)$$

Part 2

3. Dérivées partielles, gradients

3.1 Dérivée partielle

Soit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n)$ une fonction numérique à n variables définie sur une partie A de R^n. On définit la dérivée partielle de f par rapport à sa ième variable xi et on note

$$f'_{x_i}(X) = D_i f(X)$$
$$= \frac{\partial\ f(X)}{\partial\ \ x_i}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$

(0.1)

EXEMPLE 1

$f(x, y) = x^2 y^3$; $f(x, y) = x\cos(xy)$;

$f(x, y) = e^{xy}$; $f(x, y, z) = x^2 y\cos(yz)$

RAPPEL

Soit la fonction: $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer $f'(x),\ f'(0)$

EXEMPLE 2

Soit la fonction:

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\ pour\ (x,y) \neq (0,0)\ et\ f(0,0) = 0.$$

Calculer $f'_x(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

3.2 Gradient

Soit f une fonction numérique à n variables définie sur une partie A de R^n .
Le gradient de f est le vecteur défini par:

$$gradf(X) = (f'_{x_1}(X), f'_{x_2}(X), ..., f'_{x_n}(X))$$

Démontrer:

- grad (f+g) = grad f + grad g
- grad (λ f) = λ grad f

EXEMPLES

$$e^{xyz} \;;\; Ln(z+\sin(y^2-x)) \;;\; e^{-2z} \quad Cos(yz)$$

4. Différentiabilité et gradients

4.1 Introduction

Soit f une fonction à n variables (n ≥ 1) définies dans un ensemble U de R^n. Soit X un point de U. Soit H un vecteur tel que X+H $\in$U. Le quotient

$$\frac{f(X+H)-f(X)}{H}$$

n'ayant aucun sens puisqu'on ne peut pas diviser par un vecteur, on doit trouver un autre moyen pour pouvoir définir la différentiabilité (dérivabilité) d'une fonction à plusieurs variables.

Ramenons nous au cas d'une fonction à une seule variable. Nous savons que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Posons

$$\Phi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \Phi(h) = 0$$

$$\Rightarrow f(x+h)-f(x) = f'(x)\cdot h + h\Phi(h) \quad pour\ h \neq 0$$

Posons alors $\Phi(0) = 0$, Nous obtenons la relation suivante:

$$f(x+h)-f(x) = f'(x)\cdot h + |h|\Phi(h) \quad \forall\ \mathrm{h} \quad \text{avec } \lim_{h \to 0}\Phi(h) = 0 \qquad (\alpha)$$

Inversement: Supposons qu'un nombre a et qu'une fonction g(h) vérifient:

$$f(x+h)-f(x) = a\cdot h + |h| g(h) \quad \forall\ \mathrm{h} \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} g(h) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a + \frac{|h|}{h} g(h) \quad \text{avec } h \neq 0$$

En passant à la limite et en remarquant que $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} g(h) = 0$ on trouve que $a = f'(x)$

CONCLUSION

La donnée d'un nombre « a » et d'une fonction g(h) vérifiant (α) suffit pour définir la différentiabilité de la fonction f, avec l'avantage que h ne figure pas au dénominateur.

Nous nous inspirerons de tout ceci pour définir la différenatiabilité d'une fonction de plusieurs variable.

4.2 Définition (Différentiabilité)

> On dit que f est différentiable au point X si les dérivées partielles existent et s'il existe une fonction g(H) tel que $\lim_{H \to O} g(H) = 0$. et tel que
>
> $$f(X+H) - f(X) = gradf(X).H + \|H\| g(H)$$

Par exemple si f est une fonction à deux variables (x,y), désignons par (h, k) le vecteur H. la condition de differentiabilité devient alors:

$$\begin{cases} f(x+h, y+k) - f(x, y) = f_x^{'}(x, y) \cdot h + f_y^{'}(x, y) \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2}\, g(h,k) \\ \lim_{(h,k) \to (0,0)} g(h,k) = 0 \end{cases}$$

EXEMPLES

Etudier la différentiabilité de f au point (0, 0)

$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \quad si \quad (x,y) \neq (0,0) \quad et \quad f(0,0) = 0$$

4.2.1 Théorème 1

Toute fonction différentiable en un point X est continue en ce point.

En effet:

Lorsque H $\to$ 0 grad f(X).H $\to$0. $\Rightarrow$ f(X+H) $\to$ f(X) d'où la continuité.

4.2.2 Théorème 2

> Soit f une fonction numérique à n variables définie sur une partie U de R^n .Si les dérivées partielles de f existent et sont continues en un point alors cette fonction est différentiable en ce point.

Faisons la démonstration pour une fonction à deux variables.

Soit un point A=(a, b) et H=(h, k). On a

$$\begin{aligned} f(A+H) - f(A) &= f(a+h, b+k) - f(a,b) \\ &= f(a+h, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b+k) - f(a,b) \end{aligned}$$

La fonction $f(a,y)$ est une fonction à une seule variable y dérivable.. En appliquant le théorème des accroissement finis on obtient:

$$\exists \beta \in \left]0,1\right[\ / f(a,b+k) - f(a,b) = k\, f_y^{'}(a,b+\beta k)$$

En faisant le même raisonnement que pour la première variable on obtient:

$$\exists \alpha \in \left]0,1\right[\ / f\left(a+h,b+k\right) - f\left(a,b+k\right) = hf'_x\left(a+\alpha h,b+k\right)$$

D'où

$$f(A+H) - f(A) = hf_x^{'}(a+\alpha h,b+k) + kf_y^{'}(a,b+\beta k)$$

En fin de comptes en posant:

$$\Gamma_1\left(H\right) = f'_x\left(a+\alpha h,b+k\right) - f'_x\left(a,b\right)$$
$$\Gamma_2\left(H\right) = f'_y\left(a,b+\beta k\right) - f'_y\left(a,b\right)$$

On obtient:

$$h\Gamma_1\left(H\right) = h\, f'_x\left(a+\alpha h,b+k\right) - h\, f'_x\left(a,b\right)$$
$$k\Gamma_2\left(H\right) = k\, f'_y\left(a,b+\beta k\right) - k\, f'_y\, a,b$$

$$f(A+H) - f(A) = hf'_x\left(a,b\right) + kf'_y\left(a,b\right) + h\Gamma_1(H) + k\Gamma_2(H)$$

Puisque les dérivées partielles sont continues, nous déduisons:

$$\lim_{H\to 0} \Gamma_1(H) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{H\to 0} \Gamma_2(H) = 0$$

Posons:

$$h\Gamma_1(H) + k\Gamma_2(H) = \left\|H\right\| \Gamma(H)$$

$$\lim_{H\to 0} \Gamma(H) = \lim_{H\to 0} \frac{h\Gamma_1(H) + k\Gamma_2(H)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{r\to 0} \Gamma^*(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\,\Gamma_1^*(r,\theta) + r\sin\theta\,\Gamma_2^*(r,\theta)}{\sqrt{r^2}}$$
$$= \lim_{r\to 0} [\cos\theta\,\Gamma_1^*(r,\theta) + \sin\theta\,\Gamma_2^*(r,\theta)]$$

Or $\lim_{r\to 0} \Gamma_1^*(r,\theta) = 0$ et $\lim_{r\to 0} \Gamma_2^*(r,\theta) = 0$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{r \to 0} \Gamma^*(r,\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{H \to 0} \Gamma(H) = 0$$

Ainsi nous avons trouvé une fonction $\Gamma(H)$ vérifiant les conditions de la différentiabilité:

$$\lim_{H \to 0} \Gamma(H) = 0$$

$$f(A+H) - f(A) = hf_x^{'}(a,b) + kf_y^{'}(a,b) + \|H\|\Gamma(H) \qquad \textbf{c.q.f.d.}$$

4.3 Définition (Différentielle)

Si $f : R^2 \to R$ est différentiable en un point (x_0, y_0) La différentielle de f au point (x_0, y_0) est définie par :

$$df(x_0, y_0) = f_x^{'}(x_0, y_0)\,dx + f_y^{'}(x_0, y_0)\,dy$$

Pour une fonction à trois variables :

$$df(x_0, y_0, z_0) = f_x^{'}(x_0, y_0, z_0)\,dx + f_y^{'}(x_0, y_0, z_0)\,dy + f_z^{'}(x_0, y_0, z_0)\,dz$$

On peut généraliser pour une fonction à n variables.

$df(X)$ est aussi dite différentielle totale exacte de f u point X.

---

5. Dérivées partielles d'ordre supérieures

5.1 Définition

Soit f une fonction à deux variables (x,y). Les dérivées partielles quand elles existent sont aussi des fonctions de (x,y). Nous pouvons aussi calculer leurs dérivées partielles. Nous obtenons ainsi

$$D_1D_2f,\ D_2D_1f,\ D_1D_1f,\ D_2D_2f$$

que nous notons

$$D_1D_2f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

et

$$D_1^{\,2} f(x,y) = D_1D_1f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

5.1.1 Théorème (dit de Schwartz)

Soit f une fonction à deux variables définie dans un ensemble ouvert U. Si les dérivées partielles secondes f''_{xy} et f''_{yx} existent et sont continues dans U, elles y sont aussi égales.

$$D_1D_2 f(x,y) = D_2D_1 f(x,y) \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

EN EFFET

Soit ω un voisinage du point (0,0) tel que, pour tout (h,k) de ω, on ait $(a+h, b+k)$ dans U. On définit sur ω la fonction F par:

$$F(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$

Fixons k et considérons la fonction:

$$\varphi(x) = f(x,b+k) - f(x,b)$$

Nous avons :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = f(x+h,b+k) - f(x+h,b) - f(x,b+k) + f(x,b) \Rightarrow$$

$$F(h,k) = \varphi(a+h) - \varphi(a)$$

C'est une fonction continue et dérivable de la seule variable x. Dérivons:

$$\varphi'(x) = f'_x(x,b+k) - f'_x(x,b)$$

Il résulte du théorème des accroissement finis qu'un α compris entre 0 et 1 existe tel que :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x+\alpha h)$$

$$\Rightarrow \quad F(h,k) = h\left[f'_x(a+\alpha h,b+k) - f'_x(a+\alpha h,b)\right]$$

Mais la fonction $y \mapsto f'_x(a+\alpha h, y)$ est dérivable. Une nouvelle application du théorème des accroissements finis montre qu'il existe β entre 0 et 1 tel que :

$$F(h,k) = hk f''_{xy}(a+\alpha h, b+\beta k)$$

Comme f''_{xy} est continue au point (a,b) on a :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f''_{xy}(a+\alpha h, b+\beta k) = f''_{xy}(a,b)$$

Soit maintenant Ψ la fonction à une seule variable définie par:

$$\psi(y) = f(a+h,y) - f(a,y)$$

En raisonnant comme précédemment, on trouve que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f''_{yx}\left(a+\alpha h, b+\beta k\right) = f''_{yx}(a,b)$$

Ce qui prouve bien que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F(h,k)}{hk} = f''_{yx}(a,b) = f''_{xy}(a,b) \qquad \textbf{c.q.f.d.}$$

Annexe

Théorème des accroissement finis

Énoncé : Pour toute fonction à une variable réelle f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ (a et b réels tels que $a < b$), supposée continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, le théorème des accroissements finis annonce l'existence d'un réel c strictement compris entre a et b vérifiant :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$