Chapitre III

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Part 1

1. Règles de dérivation d'une fonction composée

1.1. Définition d'une fonction composée

On dit que f est une fonction composée des n variables $x_1, x_2, ..., x_n$, par l'intermédiaire des p fonctions "composantes"

$$u_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., u_p(x_1, x_2, ..., x_n)$$

si elle est définie par une relation de la forme générale

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = F[u_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., u_p(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

Lorsque, n=p=2, nous utiliserons les notations $f(x, y) = F[u(x, y), v(x, y)]$

Rappel

Lorsque y = f(x) est une fonction à une seule variable, et lorsque x=x(t), nous savons que: $f_t^{'}(x(t)) = f_x^{'}(x(t)) \cdot x_t^{'}(t)$. Nous voulons généraliser lorsque f est une fonction de plusieurs variables.

1.2. Loi de dérivation d'une fonction composée

Soit f une fonction de plusieurs variables, différentiable sur un ouvert U de R^n. Nous supposons que X est une fonction de t. c' est à dire:

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$$

Alors:

$$f_t^{'}(X(t)) = f_{x_1}^{'}(X(t)) \cdot x_1^{'}(t) + f_{x_2}^{'}(X(t)) \cdot x_2^{'}(t) + ... + f_{x_n}^{'}(X(t)) \cdot x_n^{'}(t)$$

Qu'on écrit plus simplement:

$$f_t^{'} = f_{x_1}^{'} \cdot x_1^{'} + f_{x_2}^{'} \cdot x_2^{'} + ... + f_{x_n}^{'} \cdot x_n^{'}$$

Autrement dit:

$$\boxed{f_t^{'} = (f_{x_1}^{'}, f_{x_2}^{'}, ..., f_{x_n}^{'}).(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}) \Rightarrow f_t^{'} = grad\ f(X(t)).X_t^{'}(t)}$$

EXEMPLE :

$$f(x, y) = \sin xy$$

Posons : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$f_x^{'}(x, y) = y\cos xy; \qquad f_y^{'}(x, y) = x\cos xy$$

$$
\begin{aligned}
f_r^{'}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) &= gradf\left(x,y\right)\cdot\left(x_r^{'}, y_r^{'}\right) \\
&= f_x^{'}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\times x_r^{'} + f_y^{'}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\times y_r^{'} \\
&= r\sin\theta\cos\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right)\times\cos\theta + r\cos\theta\cos\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right)\times\sin\theta \\
&= 2r\sin\theta\cos\theta\cos\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

1.3. Dérivation des fonctions implicites

DÉFINITION

> Si plusieurs variables, trois par exemple, sont liées par une relation
>
> F(x, y, z)=0,
>
> l'une d'entre elles, z par exemple, est une fonction **implicite** des autres.

EXEMPLE

$(x^2+1)z - xy^2 = 0$ définit $z = \varphi\left(x,y\right) = \dfrac{xy^2}{x^2+1}$ sur le domaine R^2.

Par extension, on parle encore de fonction implicite lorsque z vérifiant

F(x, y, z)=0

n'est pas unique, la fonction implicite possède alors plusieurs "déterminations".

Si F admet des dérivées partielles par rapport à x, y et z, on peut démontrer que, sauf en des points exceptionnels, z=φ(x, y) admet des dérivées partielles.

Envisageons deux cas:

Cas 1 : z=φ(x) définie par F(x, z)=0.

$$dF = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad si \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0. \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}},\quad si \quad F_z^{'} \neq 0.$$

Cas 2 : z=φ(x, y) définie par F(x, y, z)=0

$$dF = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow\ dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy,\quad si \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

$$\Rightarrow dz = -\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}dx - \frac{F_y^{'}}{F_z^{'}}dy, \quad si \quad F_z^{'} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Comme } dz = z_x^{'}dx + z_y^{'}dy \Rightarrow si \quad F_z^{'} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} z_x^{'} = -\dfrac{F_x^{'}}{F_z^{'}} \\ z_y^{'} = -\dfrac{F_y^{'}}{F_z^{'}} \end{cases}$$

2. Extremums des fonctions numériques de deux variables

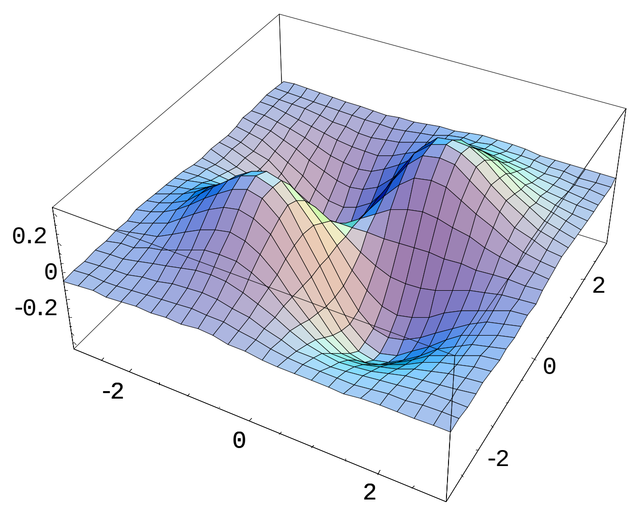
2.1. Extremum local

Soit f une fonction définie dans un ensemble ouvert U de R². $f : U \to R^2$

1. On dit que f admet un maximum local en P si et seulement si :

   $$\exists r > 0, \ \ \forall X \in U \cap B(P,r) \Rightarrow f(X) \leq f(P)$$

   Autrement dit qu'il existe un voisinage de P tel que $f(P)$ est un maximum dans ce voisinage.



2. On dit que f admet un minimum local en P si et seulement si :

   $$\exists r > 0, \ \ \forall X \in U \cap B(P,r) \Rightarrow f(P) \leq f(X)$$

   Autrement dit qu'il existe un voisinage de P tel que $f(P)$ est un minimum dans ce voisinage.

3. On dit que f admet un extremum local en P si et seulement si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

Similitude avec une fonction à une variable :

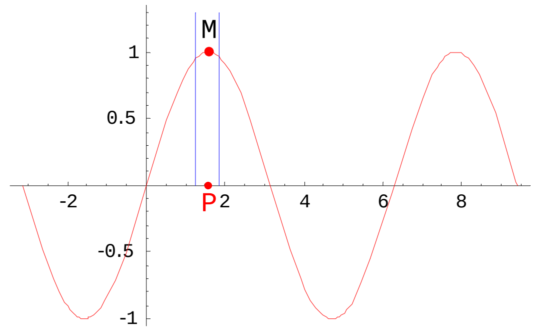


Figure 1

2.2. Points critiques

Soit f une fonction différentiable définie dans un ensemble ouvert U. Soit P un point de U. Si toutes les dérivées partielles de f sont nulles au point P, nous disons que P est un point crtitique de f.

Pour une fonction de deux variables le point $P(x_0, y_0)$ est un point critique de f si et seulement si :

$$f'_x(x_0, y_o) = 0 \text{ et } f'_y(x_0, y_o) = 0$$

Théorème

Soit f une différentiable définie dans un ensemble ouvert U de R^2. Soit P un point où f atteint un maximum local (respectivement un minimum local). Alors P est un point critique de f.

EN EFFET

La démonstration est identique à celle d'une fonction d'une variable. Considérons un vecteur non nul H et une valeur de t, choisi de façon que P+t H soit toujours dans U. Comme $f(P)$ est un maximum on a :

$$f(P+tH) \leq f(P)$$

La fonction d'une variable $g(t) = f(P+tH)$ admet un maximum local au point t=0, c'est-à-dire $g'(0) = 0$ Or :

$$g'(t) = f'_t(P+tH) = gradf(P+tH)\cdot(P+tH)' = gradf(P+tH)\cdot H$$

Pour t =0 : $g'(0) = gradf(P).H = 0$

Cette égalité est vraie pour tout H donc :

$$\Rightarrow gradf(P) = 0 \Rightarrow \left(f'_x(P), f'_y(P)\right) = (0,0)$$

$\Rightarrow$ P est un point critique de la fonction f.

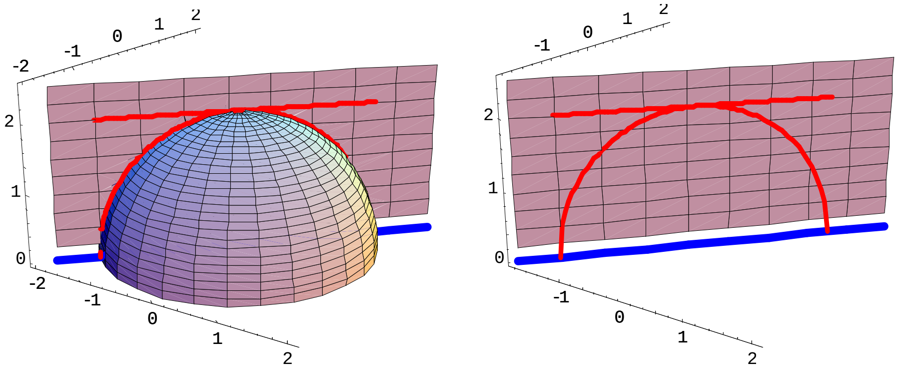


Figure 2

Comme pour une fonction à une variable un point critique peut être un maximum local, un minimum local ou bien un point d'inflexion. Voici une schématisation de ces trois cas.

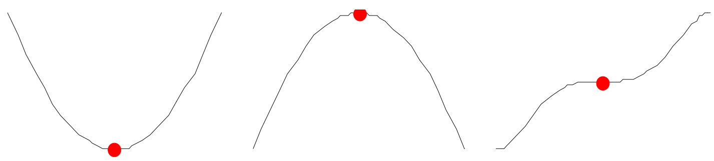


Figure 3

Voici pour une fonction de deux variables trois cas de points critiques :

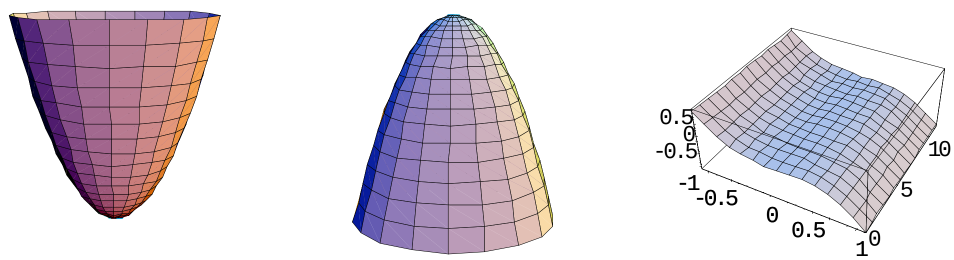


Figure 4

Part 2

3. Plan tangent

3.1. Définition d'une surface

Soit f une fonction différentiable définie dans un ensemble ouvert U de R^3. Soit k un nombre. L'ensemble des points X tel que :

$$F(X)=k \qquad avec \qquad gradF(X)\neq 0$$

est appelé **surface.**

EXEMPLE

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$F(x,y,z) = 1$, est une surface une sphère centrée à l'origine de rayon 1.

3.2. Propriété

Soit S une surface définie sur U par:

$$F(X) = k \qquad avec \qquad gradF(X) \neq 0$$

Le vecteur $gradF(X)$ est perpendiculaire à toutes les courbes de la surface passant par le point F(X).

Il est dit **vecteur normal** à la surface S.

En effet:

Soit C(t) une courbe appartenant à la surface S, c'est-à-dire

$$F(C(t)) = k$$

et soit un point P=C(t_0) de cette courbe. Dérivons par rapport à t:

$$F'(C(t)) = gradF(C(t)).C'(t) = k' \Rightarrow gradF(P).C'(t_0) = 0$$

Comme C'(t_0) est la direction du vecteur tangent à la courbe C(t) au point P nous déduisons qu'en ce point le vecteur gradF(P) est normal à la courbe C(t). Il en est ainsi de toutes les courbes passant par P et appartenant à la surface S. GradF(P) est donc normal à la surface en ce point.

EXEMPLE 1

Soit S la surface définie par :

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

et soit $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ un point de la surface. Considérons les deux courbes

- C(x) est l'intersection de la surface S avec le plan y = x.
  - Ecrire l'équation de cette courbe
  - Vérifier que P est un point de C.
  - Trouver la direction de la tangente à cette courbe au point P
- Mêmes questions pour $\gamma(x)$ intersection de la surface S avec le plan y =1- x.

SOLUTION

$$C(x) = (x, x, \sqrt{1-2x^2}) \text{ et } \gamma(x) = (x, 1-x, \sqrt{-2x^2+2x})$$

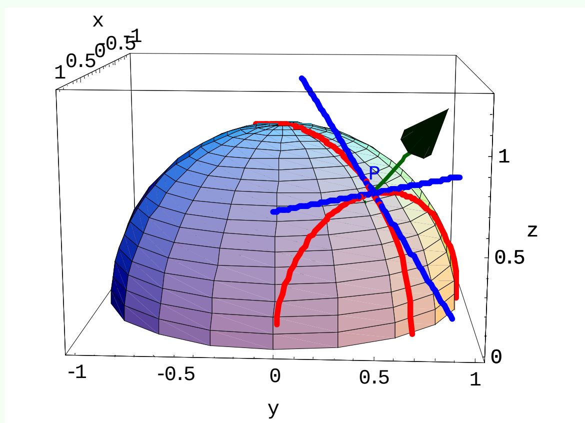


Figure 5

$C'(\frac{1}{2})$ représente la direction à tangente à la courbe C et par conséquence à la surface S au point $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\text{Or : } C'(x) = \left(1, 1, \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}\right) \Rightarrow C'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1, 1, -\sqrt{2}\right)$$

De même $\gamma'(\frac{1}{2})$ représente la tangente à la courbe γ et par conséquence à la surface S au point P.

$$\gamma'(x) = \left(1, -1, \frac{-2x+1}{\sqrt{-2x^2+2x}}\right) \Rightarrow \gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = (1, -1, 0)$$

La normale à ces deux tangentes est donnée par :

$$N(\frac{1}{2}) = C'(\frac{1}{2}) \wedge \gamma'(\frac{1}{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$$

Or

$$gradF(X) = 2(x, y, z) \Rightarrow gradF(\frac{1}{2}) = (1, 1, \sqrt{2}) \Rightarrow gradF(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} N(\frac{1}{2})$$

Ceci prouve que le vecteur $gradF(\frac{1}{2})$ et le vecteur $N(\frac{1}{2})$ sont colinéaires. On voit bien que le vecteur $gradF(\frac{1}{2})$ est le vecteur normal à la surface au point P.

EXEMPLE 2

Ecrire l'équation de la tangente à la courbe $x^2 y + y^3 = 10$ au point P=(1, 2) et définir un vecteur normal à cette courbe en ce point.

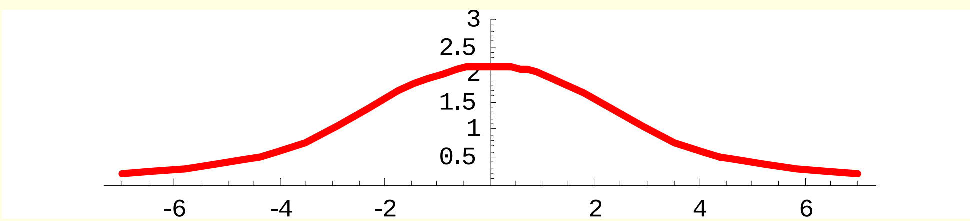


Figure 6

Posons $f(x, y) = x^2 y + y^3 - 10$. Une normale à cette courbe est définie par :

$$gradf(x, y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$$

Au point P : $gradf(P) = (4, 13)$

Soit X le point courant de la tangente. Comme P est aussi un point de la tangente, le vecteur porté par la tangente est donné par X-P. Ainsi le produit scalaire de la normale à la courbe avec ce vecteur est nulle.

L'équation cartésienne de la tangente à la courbe au point P est alors par :

$$X.N = N.P \Rightarrow (x, y).(4, 13) = (4, 13).(1, 2) \Rightarrow 4x + 13y = 30$$

3.3. Définition d'un plan tangent

Soit S une surface définie sur $U \subset R^3$ par : F (X) = k avec gradF(X) ≠ 0. Le plan tangent à la surface S en un point $P(x_P, y_P, z_P)$ est par définition le plan passant par P et admettant gradF (P) comme vecteur normal.

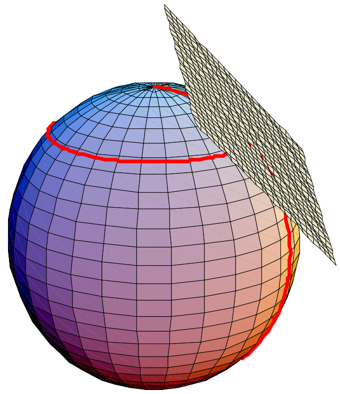


Figure 7

EXEMPLE 3

- Ecrire l'équation du plan tangent à la surface $z = x^2 + y^2$ au point P= (1, 2, 5)

SOLUTION

Posons $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$. La normale à cette surface est donnée par :

$$gradf(x,y,z) = (2x,2y,-1) \Rightarrow gradf(P) = (2,4,-1)$$

L'équation du plan tangent à la surface au point P est donné par :

$$X.N = N.P \Rightarrow (x,y,z).(2,4,-1) = (2,4,-1).(1,2,5)$$

$$\Rightarrow 2x + 4y - z = 5$$

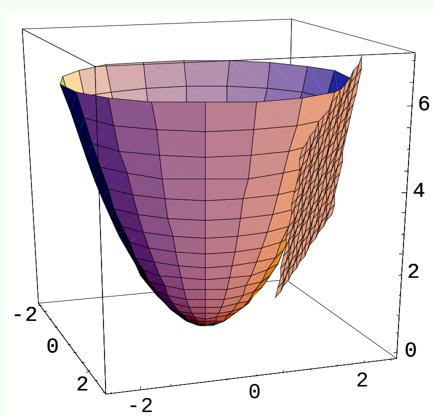


Figure 8

EXEMPLE 4

- Trouver l'équation paramétrique de la tangente à la courbe d'intersection des deux surfaces suivantes : $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 6$ et $S_2 : x^3 - y^2 + z = 2$ au point P=(1,1,2)

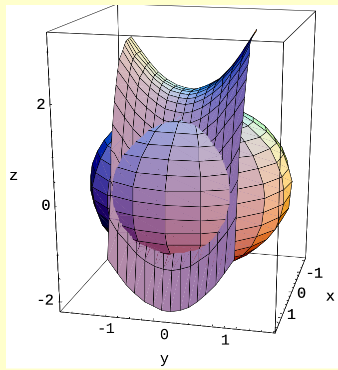


Figure 9

SOLUTION

Posons $f\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ et $g\left(x,y,z\right) = x^3 - y^2 + z - 2$

$$n_1 = gradf\left(x,y,z\right) = \left(2x,2y,2z\right) \Rightarrow gradf\left(P\right) = \left(2,2,4\right) = 2\left(1,1,2\right)$$

$$n_2 = gradg\left(x,y,z\right) = \left(3x^2,-2y,1\right) \Rightarrow gradf\left(P\right) = \left(3,-2,1\right)$$

MÉTHODE 1

Le vecteur porté par la tangente aux deux courbes est donné par :

$$u = n_1 \wedge n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \left(1,1,-1\right)$$

L'équation de la tangente est alors :

$$M\left(t\right) = P + tu \Rightarrow M\left(t\right) = \left(1,1,2\right) + t\left(1,1,-1\right) = \left(1+t,1+t,2-t\right)$$

MÉTHODE 2

Equation du plan tangent à la surface S_1 au point P :

$$\left(x,y,z\right).\left(1,1,2\right) = \left(1,1,2\right).\left(1,1,2\right) \Rightarrow x + y + 2z = 6$$

Equation du plan tangent à la surface S_2 au point P :

$$\left(x,y,z\right).\left(3,-2,1\right) = \left(3,-2,1\right).\left(1,1,2\right) \Rightarrow 3x - 2y + z = 3$$

L'intersection des deux plans est la tangente aux deux surfaces et passant par P.

$$S_1 \cap S_2 \Rightarrow x + y + 2z = 6x - 4y + 2z \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$$

$$\Rightarrow x + z = 3 \quad dans\, le\, plan\, x = y$$

$$S_1 \cap S_2 \Rightarrow X(t) = (t,t,3-t)$$

Remarque

$M(-1) = (0,0,3) \Rightarrow M(t) = (0,0,3) + t(1,1,-1) = (t,t,3-t) \Rightarrow$
$M(t) = X(t)$

4. Dérivée directionnelle

4.1. Définition

Soit f une fonction différentiable de $A \subset R^n$ dans R et u un vecteur **unitaire** de U. On appelle dérivée de f au point P dans la direction du vecteur u, la limite au point t=0, si elle existe du rapport suivant:

$$\boxed{D_u f(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+tu) - f(P)}{t}}$$

La notation $f_u^{'}(P)$ est aussi adoptée.

F étant différentiable au point P, on a :

$$f(P+tu) - f(P) = gradf(P) \cdot tu + \|tu\| g(tu)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P+tu) - f(P)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{gradf(P).tu + \|tu\| g(tu)}{t} = gradf(P).u$$

Donc $\boxed{D_u f(P) = gradf(P) \cdot u}$

4.1.1. Interprétation géométrique

Soit f une fonction numérique différentiable définie dans un ensemble ouvert $A \subset R^2$ définissant une surface S. Soit P (u, v) un point et u(a, b) un vecteur **unitaire** du même ouvert **A**.

La droite passant par P et parallèle au vecteur u, a pour équation: X (t)=P+t u.. $f(P+tu)$ est la courbe intersection de la surface avec le plan P+tu. La pente de la tangente à cette courbe au point f(P) est donné par $f_t^{'}(P)$.

Or

$$f_t^{'}(P+tu) = gradf(P+tu) \cdot (P+tu)_t^{'} = gradf(P+tu) \cdot u$$

Pour t = 0 :

$$f_t^{'}(P) = gradf(P) \cdot u$$

La pente de cette tangente est donc confondue avec la **dérivée directionnelle** de f au point P dans la direction de u .

La direction de cette tangente est donc donnée par : $(x_u, y_u, D_u f(P))$

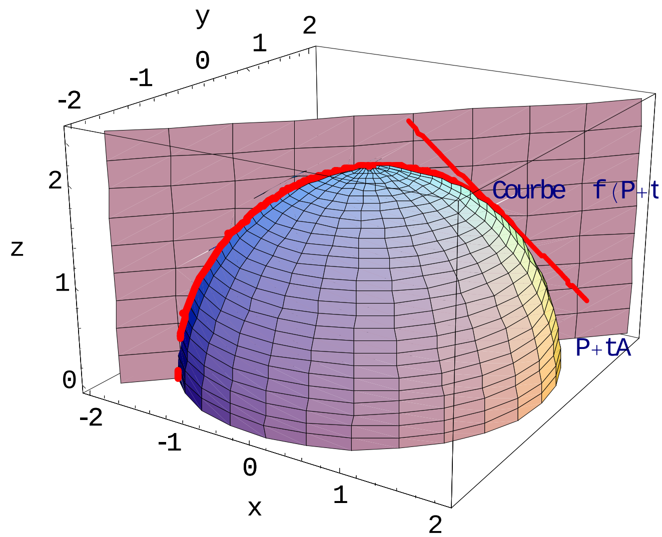
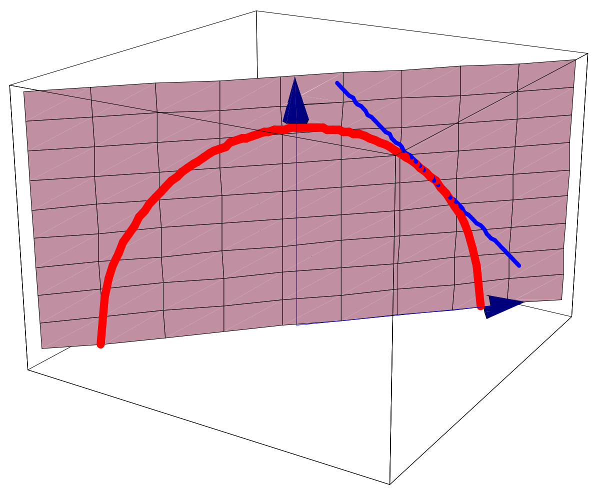
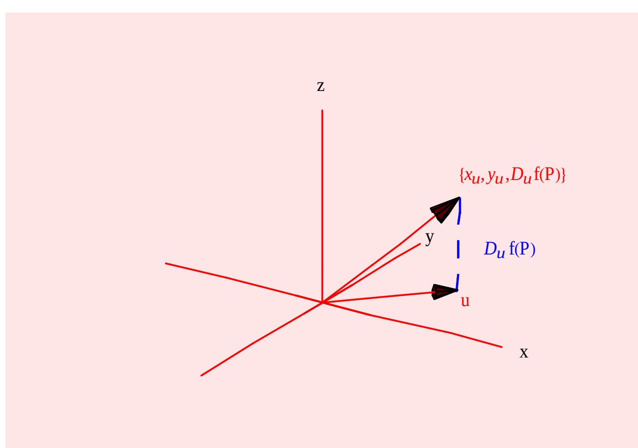


Figure 10





1. EXEMPLE 1

Soit $z = f(x,y) = x^2 + y^3$ et soit $v = (1,2)$ Calculer la dérivée de f dans la direction de v au point P(-1,3)

SOLUTION

Posons $f(x,y) = x^2 + y^3$

v n'étant pas un vecteur unitaire considérons le vecteur

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

$$gradf(x,y) = (2x, 3y^2) \Rightarrow gradf(P) = (-2,27)$$

$$\Rightarrow D_u f(P) = gradf(P.u) = (-2,27).\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = \frac{52}{\sqrt{5}}$$

la direction de la tangente au point $(x_P, y_P, z_P) = (-1,3,28)$ à la surface $z = x^2 + y^3$ dans la direction de u est donnée par :

$$(x_u, y_u, D_u f(P)) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{52}{\sqrt{5}}\right)$$

4.2. Maximum de la dérivée directionnelle

Nous savons que pour un vecteur unitaire u :

$$D_u f(P) = gradf(P).u$$

Notons θ l'angle que fait le vecteur $gradf(P)$ avec le vecteur u. Alors :

$$D_u f(P) = \|gradf(P)\|.\|u\|\cos(\theta) = \|gradf(P)\|\cos(\theta)$$

Puisque le maximum de $\cos(\theta)$ est atteint lorsque $\cos(\theta) = 1$ et puisque $\|gradf(P)\|$ est une constante positive, le maximum de $D_u f(P)$ est atteint lorsque $\cos(\theta) = 1$ c'est-à-dire lorsque le vecteur unitaire u est dans la direction du $gradf(P)$

2. EXEMPLE 2

Dans l'exemple précédent u doit être :

$$u = \frac{gradf(P)}{\|gradf(P)\|} = \frac{1}{\sqrt{733}}(-2,27)$$

Le maximum de $D_u f(P)$ est alors $\|gradf(P)\| = \sqrt{733}$

3. EXEMPLE 3

Ecrire l'équation de la tangente à la surface $z = x^2 + 2y$ dans la direction de $A = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ au point $\left(x_P, y_P, f\left(P\right)\right)$ avec $P = (2,4)$

SOLUTION

$$\left(x_P, y_P, f\left(P\right)\right) = \left(2,4,12\right)$$

La pente de la tangente est :

MÉTHODE 1

$$\Rightarrow P + tA = \left(2 + \frac{t}{\sqrt{5}}, 4 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$$

$$f(P+tA) = \left(2 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2\left(4 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow f(P+tA) = \frac{t^2}{5} + \frac{8}{\sqrt{5}}t + 12 \Rightarrow f_t^{'}(P+tA) = \frac{2}{5}t + \frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$f_t^{'}(P) = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

MÉTHODE 2

$$grad f(X) = (2x,2) \Rightarrow grad f(P) = \left(4,2\right) \Rightarrow$$

$$D_A f(P) = grad f(P).A = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

DIRECTION DE LA TANGENTE

$$u = \left(x_A, y_A, D_A f\left(P\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$$

EQUATION DE LA TANGENTE

L'équation de la tangente à la surface au point $\left(x_P, y_P, z_P\right)$ dans la direction A, est l'équation de la droite passant par le point $\left(x_P, y_P, z_P\right)$ et parallèle au vecteur u :

$$X\left(t\right) = \left(x_P, y_P, z_P\right) + tu \Rightarrow$$

$$X\left(t\right) = (2,4,12) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow X\left(t\right) = \left(2 + \frac{t}{\sqrt{5}}, 4 + \frac{2t}{\sqrt{5}}, 12 + \frac{8t}{\sqrt{5}}\right)$$

4. EXEMPLE 4

Ecrire l'équation de la tangente à la surface $f(x,y) = z = x^2 + y^2$ dans la direction de $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ au point $\left(x_P, y_P, f(P)\right)$ avec $P = (1,0)$

PENTE DE LA TANGENTE

$$gradf(X) = (2x, 2y) \Rightarrow gradf(P) = (2,0) \Rightarrow gradf(P).A = -\sqrt{2}$$

DIRECTION DE LA TANGENTE

$$u = \left(x_A, y_A, D_A f(P)\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$$

EQUATION DE LA TANGENTE

La tangente est la droite passant par le point $\left(x_P, y_P, z_P\right)$ et parallèle au vecteur :

$$X(t) = \left(x_P, y_P, z_P\right) + tu \Rightarrow X(t) = (1,0,1) + t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$X(t) = \left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2}t\right)$$

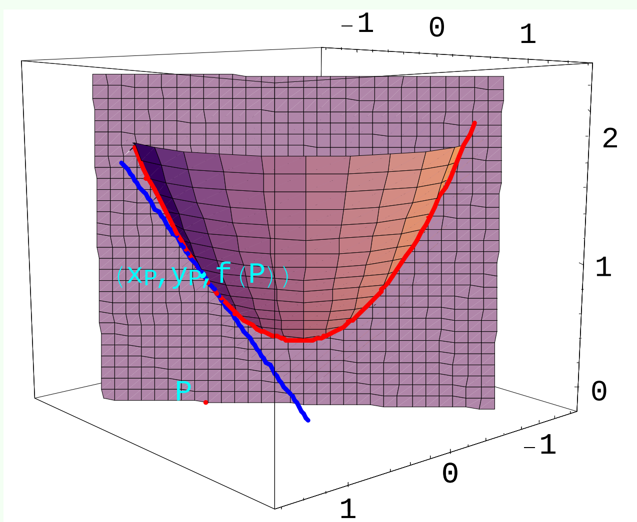


Figure 11

5. EXEMPLE 5

Soit $i = e_1 = (1,0)$ et $j = e_2 = (0,1)$. Soit P=(a,b) Calculer $D_i f(P)$ et $D_j f(P)$

SOLUTION

$$D_i f(P) = gradf(P).(1,0) = \left(f_x^{'}(P), f_y^{'}(P)\right).(1,0) = f_x^{'}(P)$$

Or

$$f_x^{'}(P) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P+ti) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = D_i f(P)$$

De même :

$$D_j f(P) = gradf(P).(0,1) = \left(f_x^{'}(P), f_y^{'}(P)\right).(0,1) = f_y^{'}(P)$$

$$f_y^{'}(P) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P+tj) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t} = D_j f(P)$$

6. EXEMPLE 6

Soit la fonction f : $z = f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ et soit le point P (1,1) et le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ Calculer $D_u f(P)$

SOLUTION

PREMIÈRE **MÉTHODE**

$$P + tu = (1,1) + \frac{t}{\sqrt{2}}(1,1) = (1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$gradf((x,y) = (\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}) \Rightarrow gradf(P) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$$

$$D_u f(P) = gradf(P) \cdot u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = -\frac{1}{2}(1+1) = -1$$

DEUXIÈME MÉTHODE

Le plan passant par la droite $P + tu$ et parallèle à l'axe des z a pour équation y=x. La courbe d'intersection de ce plan avec l'hémisphère est donnée par:

$$C(t) = f(P + tu) = \sqrt{4 - 2(1 + \frac{t}{\sqrt{2}})^2}$$

$$\Rightarrow C'(t) = \frac{-\sqrt{2}(1 + \frac{t}{\sqrt{2}})}{\sqrt{4 - 2(1 + \frac{t}{\sqrt{2}})^2}} \Rightarrow C'(0) = D_u f(P) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

TANGENTE

L'équation de la tangente à la surface au point (x_P, y_P, z_P) dans la direction u, est l'équation de la droite passant par le point (x_P, y_P, z_P) et parallèle au vecteur :

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$$

$$X = (x_P, y_P, z_P) + tu \Rightarrow X(t) = (1,1,\sqrt{2}) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$$

$$\Rightarrow X(t) = (1,1,\sqrt{2}) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$$

$$\Rightarrow X(t) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} - t\right)$$

7. EXEMPLE 7

Soit la fonction définie par $f(x,y)=x^2+y^2$ C'est une surface de révolution autour de l'axe z'z car $z=f(r)$ Soit le point P (1,1) et le vecteur $u=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ Calculer $D_u f(P)$

SOLUTION

PREMIÈRE MÉTHODE

$$P+tu=(1,1)+\frac{t}{\sqrt{5}}(2,1)=(1+\frac{2t}{\sqrt{5}},1+\frac{t}{\sqrt{5}})\ ;$$

$$gradf((x,y)=(2x,2y)\Rightarrow gradf(P)=(2,2)$$

$$D_u f(P)=gradf(P)\cdot u=(2,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(4+2)=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

DEUXIÈME MÉTHODE

Le plan passant par la droite $P+tu$ et l'axe des z a donc pour équation y=x.
Ce plan coupe l'hémisphère en :

$$C(t)=f(P+tu)=\left(1+\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(1+\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\Rightarrow C'(t)=2t+\frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow C'(0)=D_u f(P)=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

TANGENTE

Posons $z_P=f(P)$

$$u=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\ \text{c.à d.}\ X(t)=(x_P,y_P,z_P)+tu$$

$$\Rightarrow X(t)=(1,1,2)+t\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow X(t)=\left(1+\frac{2t}{\sqrt{5}},1+\frac{t}{\sqrt{5}},2+\frac{6t}{\sqrt{5}}\right)$$

5. Supplément de technique de dérivation

Considérons le cas d'une fonction à deux variables u et v où u et v dépend chacune de deux variables x et y. u= u(x, y) et v= v(x, y)

$$f(x, y) = F[u(x, y), v(x, y)]$$

En appliquant successivement la règle de dérivation en fixant x puis en fixant y on obtient:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Voici l'écriture matricielle de ce résultat:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix}$$

où la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x^{'} & v_x^{'} \\ u_y^{'} & v_y^{'} \end{pmatrix}$$

est dite "**matrice jacobienne**" de u et v par rapport à x et y.