Chapitre IV

Fonctions Potentielles

1. Formes Différentielles

1.1. Définitions

Cas de deux variables

Soit U un ouvert de R^2 . On appelle **forme différentielle sur U** toute application w telle qu'il existe deux applications $P,Q:U \to R$ de **classe** C^1 sur U telle que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad w(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Cas de trois variables

Soit U un ouvert de R^3. On appelle **forme différentielle sur U** toute application w telle qu'il existe deux applications $P,Q,R:U \to R$ de classe C^1 sur U telle que :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad w(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

1.2. Formes différentielles exactes

Définition

Soient U un ouvert de R^2 et w une forme différentielle sur U. On dit que w est **exacte sur U** (ou: w admet des primitives sur U) si et seulement s'il existe $f : U \to R$ de classe C^1 sur U telle que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad df(x,y) = w(x,y)$$

En utilisant les composantes P et Q de w :

$$\forall (x,y) \in U, \quad w(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

La relation $df(x,y) = w(x,y)$ est équivalente à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f_x^{'}(x,y) = P(x,y) \\ f_y^{'}(x,y) = Q(x,y) \end{cases}$$

Définition analogue pour trois variables

Exemples

$$w(x,y) = xdx + ydy = d\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

$$w(x,y) = xdy + ydx = d(xy)$$

$$w(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$$

1.3. Formes différentielles fermées

Définition

Cas de deux variables

Soit U un ouvert de R^2 et w une forme différentielle sur U, définie par:

$$\forall (x,y) \in U, \quad w(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

On dit que w est **fermée** sur U si et seulement si :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ou} \quad P_y^{'}(x,y) = Q_x^{'}(x,y)$$

Cas de trois variables

Soit U un ouvert de R^3 et w une forme différentielle sur U, définie par :

$$\forall (x,y,z)\in U,\quad w(x,y,z)=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

On dit que w est fermée sur U si et seulement si :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

Ou

$$P_y^{'}=Q_x^{'},\ Q_z^{'}=R_y^{'},\ R_x^{'}=P_z^{'}$$

Méthode pour mémoriser :

Définissons le vecteur **rotationnel** par :

$$rot\left(P,Q,R\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Une forme différentielle w est fermée si $rot\left(P,Q,R\right)=0$

Notation

Si la forme s'écrit :

$$w(x,y,z)=f_1(x,y,z)dx+f_2(x,y,z)dy+f_3(x,y,z)dz$$

Une forme différentielle w est fermée si :

$$rot\left(f_1,f_2,f_3\right)=0\Leftrightarrow \forall i\neq j,\quad D_i f_j=D_j f_i$$

Théorème

> Toute forme différentielle exacte est fermée.

On fera la démonstration dans R^2

DÉMONSTRATION

Soit

$$w(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

une forme différentielle exacte sur un ouvert U Ceci équivaut à dire qu'il existe une fonction *f* de classe C^1 telle que :

$df(x,y) = w(x,y)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

P *et* Q étant de classe C^1 sur U $\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ continues

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ continues et d'après le théorème de Schwartz :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

On fait de même pour une forme différentielle de trois variables

---

Définition

Soit ***X*** un ensemble borné de R^2 ou de R^3

1) Soit $A \in X$; on dit que ***X*** **est étoilée par rapport à *A*** si et seulement si :

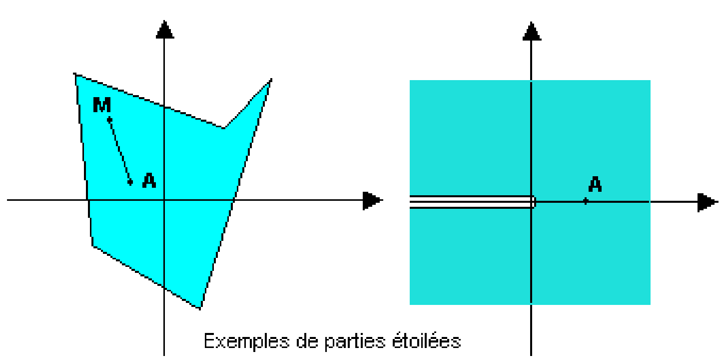
$$\forall M \in X, \quad [AM] \subset X$$

où $[AM]$ désigne le segment joignant A et M, c'est à dire

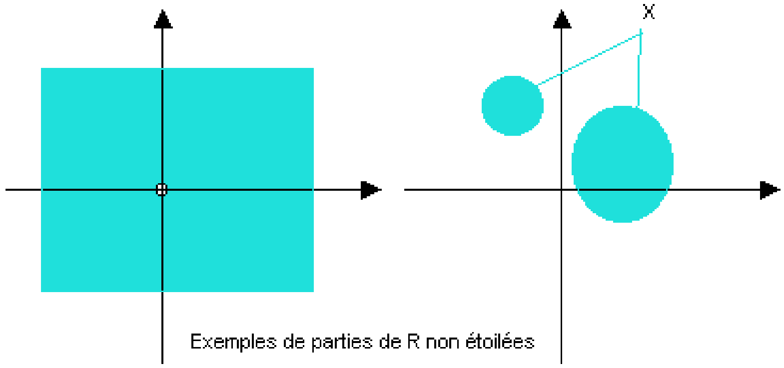
$$[AM] = \{P \in R^2 \text{ ou } R^3; \exists \lambda \in [0,1], (P - A) = \lambda(M - A)\}$$

2) On dit que ***X*** est **étoilée** si et seulement s'il existe $A \in X$ tel que ***X*** soit étoilée par rapport à A.

Rappel : Une partie A de R² est dite connexe par arcs, si et seulement si, tout couple de point de A peu être joint par une courbe entièrement contenue dans A.



Exemples de parties étoilées



Théorème de Poincaré

> Soient U un ouvert **étoilé** de R^3 (ou R^2) et w une forme différentielle sur U.
> Si w **fermée** sur U alors w est **exacte** sur U.

Exemple

Etudier la forme différentielle w définie sur R^2 par :

$$w(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2 - 2y)dy$$

Posons $P(x,y) = 3x^2y + 2x + y^3$ et $Q(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 2y$

Nous avons : $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3\left(x^2 + y^2\right)$

La forme différentielle w est donc fermée. Comme R^2 est étoilé elle est donc exacte.

On peut le vérifier en considérant la fonction :

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) + xy\left(x^2 + y^2\right)$$

et en remarquant que : $df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = w(x,y)$

2. Champ de vecteurs

Définition

Soit U un ensemble ouvert. Nous appelons champ de vecteurs ou champ vectoriel, toute application qui à tout point de U associe un vecteur de même dimension.

$$F : R^n \to R^n$$

EXEMPLE

- Soit $F(x,y)=(x^2y,\sin xy)$ C'est un champ vectoriel défini sur R^2.

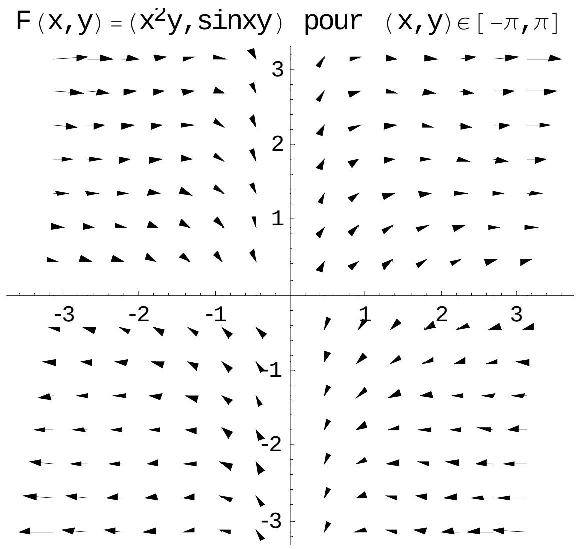
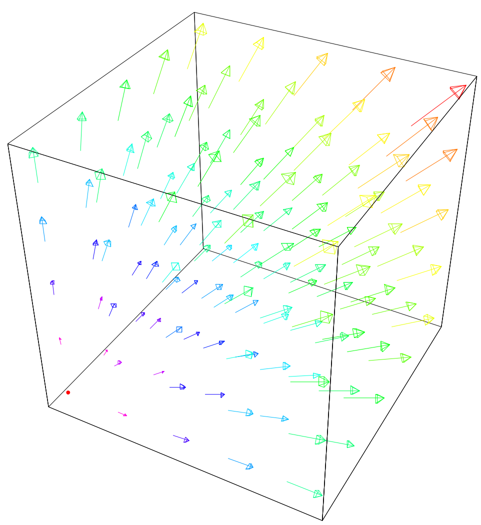


Figure 1

- Soit $F(x,y,z)=(x,y,z)$ C'est un champ vectoriel défini sur R^3.



- Le champ de vecteurs $gradf(x,y)=\left(f_x^{'}(x,y),f_y^{'}(x,y)\right)$ est un champ de vecteur associé à la fonction différentiable f Il est dit **champ de gradient.**

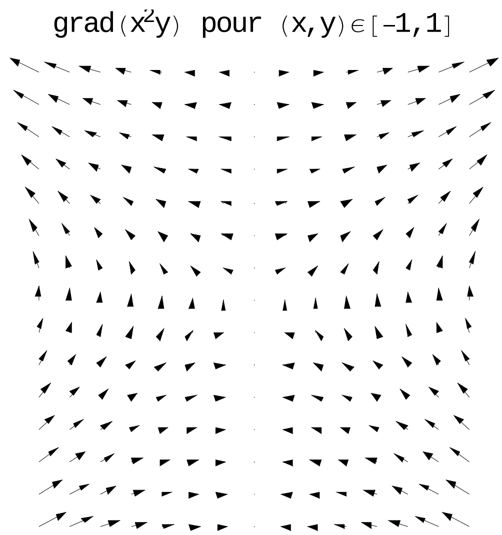


Figure 2

3. Fonctions potentielles

3.1. Définition

Soit F un champ de vecteurs défini sur un ensemble ouvert U.

Soit φ est une fonction différentiable définie sur U vérifiant F = gradφ. φ est dite **fonction potentielle** de F.

Si F = - gradφ , φ est dite **énergie potentielle** de F.

3.2. Existence d'une fonction potentielle

Le problème d'existence d'une fonction potentielle d'un champ de vecteur :

$$F(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$$

C'est un problème identique à celui de trouver si la forme $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ **est exacte.**

EXEMPLE 1

Soit $F(x, y)=(x^2 y, \sin xy)$. Posons $P(x, y)=x^2 y$ et $Q(x, y)=\sin xy$. Alors :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=y\cos xy \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

F n'admet donc pas une fonction potentielle.

EXEMPLE 2

Soit $F(x,y)=(e^{xy},e^{x+y})$ admet-elle une fonction potentielle?

Posons $f(x,y)=e^{xy}$ et $g(x,y)=e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}$; $\frac{\partial g}{\partial x}=e^{x+y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$

F n'admet donc pas de fonction potentielle.

EXEMPLE 3

Soit $F(x,y)=(2xy, x^2+y^2)$ admet-elle une fonction potentielle?

Posons f(x, y)=2xy et $g(x,y)=x^2+y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=2x$; $\frac{\partial g}{\partial x}=2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$

Comme F est définie dans R^2 en entier et que R^2 est étoilé, elle admet donc une fonction potentielle. Soit φ cette fonction. φ Vérifie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=2xy \ et \ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=x^2+y^2$$

$$\varphi(x,y)=\int 2xydx+\alpha(y)=x^2y+\alpha(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}=x^2+\alpha'(y) \Rightarrow \alpha'(y)=y^2 \Rightarrow \alpha(y)=\frac{y^3}{3}+C$$

En fin de compte nous obtenons $\boxed{\varphi(x,y)=x^2y+\frac{y^3}{3}+C}$

$$\Rightarrow (2xy, x^2+y^2)=grad(x^2y+\frac{y^3}{3}+C)$$

EXEMPLE 4

Soit $F(x,y,z)=(y\cos xy, x\cos xy+2yz^3,\ 3y^2z^2)$. Admet-elle une fonction potentielle f?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=y\cos xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x\cos xy+2yz^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3y^2z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3y^2z^2 \Rightarrow f(x,y,z)=y^2z^3+\alpha(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\alpha_x^{'}(x,y)=y\cos xy \Rightarrow \alpha(x,y)=\int y\cos xy\,dx=\sin xy+\beta(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)=y^2z^3+\sin xy+\beta(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2yz^3+x\cos xy+\beta'(y)$$

$$\Rightarrow \beta'(y)=0 \Rightarrow \beta(y)=C \Rightarrow f(x,y,z)=y^2z^3+\sin xy+C$$

$$\Rightarrow (y\cos xy, x\cos xy+2yz^3, 3y^2z^2)=grad(y^2z^3+\sin xy+C)$$

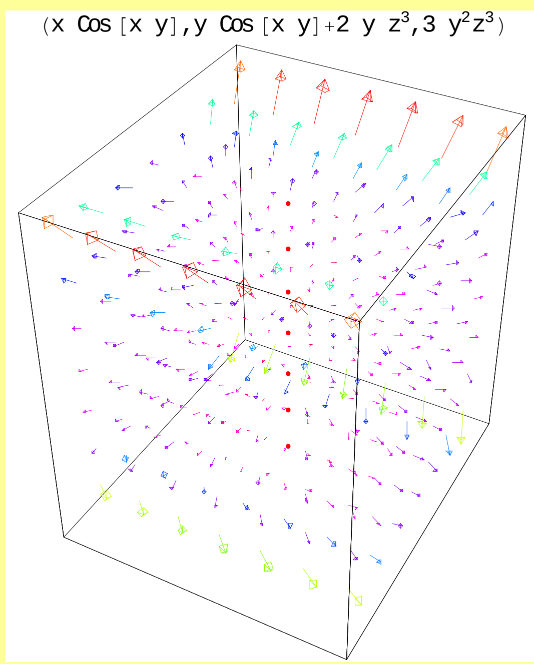


FIGURE 3

EXEMPLE 5

Soit $G(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ admet-elle une fonction potentielle?

Posons $f(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $g(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

Mais la fonction n'admet pas une fonction potentielle dans R^2 puisqu'elle n'est pas continue au point (0,0).

Par contre si on pose $\varphi(x,y)=Arctg(\frac{y}{x})+c$ avec $x\neq 0 \Rightarrow G\left(x,y\right)=grad\,\varphi(x,y)$

G admet une fonction potentielle dans tout U étoilé ne coupant pas l'axe des y.

Si on passe en coordonnées polaires on obtient :

$$\varphi(x,y)=Arctg(\frac{y}{x}) \Rightarrow \varphi^*\left(r,\theta\right)=\theta$$

Donc

$$\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=d\theta$$

Résultat à retenir pour ultérieurement.

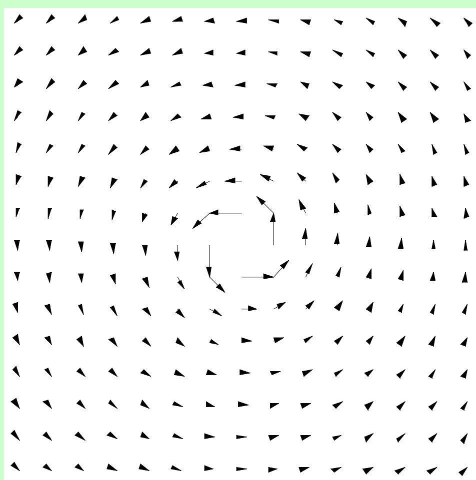


Figure 4

EXEMPLE 6

Soit $F(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ admet-elle une fonction potentielle?

Posons $P=\frac{x}{x^2+y^2}$ et $Q=\frac{y}{x^2+y^2}$ => $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

P et Q sont définies dans $R^2-\{0,0\}$ qui n'est pas étoilé. Considérons un domaine U étoilé de R^2 et qui ne contient pas le point $\{0,0\}$. Dans ce domaine il est facile de prouver que :

$$F(x,y)=grad\left(\frac{1}{2}Log\left(x^2+y^2\right)\right)=grad\,\varphi(x,y)$$

$\varphi(x,y)$ est définie dans $R^2-\{0,0\}\Rightarrow$ Le champs de vecteur $F(x,y)$ admet donc une fonction potentielle dans $R^2-\{0,0\}$

4. Dérivation sous le signe somme

4.1. Théorème

Supposons qu'une fonction de deux variables f ainsi que sa dérivée partielle $D_2 f$ existent et sont continues dans le rectangle [a, b]×[c, d]. Posons

$$F(y)=\int_a^b f(t,y)dt$$

Alors F est dérivable par rapport à y et

$$F'(y)=\int_a^b f_y^{'}(t,y)\,dt \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}(y)=\int_a^b \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(t,y)\,dt$$

4.2. Généralisation: Formule de Leibniz

$$F(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow F^{'}(y)=\int_{u(y)}^{v(y)} f_y^{'}(x,y)\,dx+f(v(y),y)v_y^{'} - f(u(y),y)u_y^{'}$$

EXEMPLES

- $$f(y)=\int_y^{y^2} x^2(y-x)^3\,dx$$
  - $f'(y)=\int_y^{y^2} 3x^2(y-x)^2\,dx+2y^5\left(y-y^2\right)^3$
- $$g(x,y)=\int_1^x e^{-t^2-y^2}\,dt$$
  - $g'_x(x,y)=e^{-x^2-y^2}$
  - $g'_y(x,y)=\int_1^x -2ye^{-t^2-y^2}\,dt$