Chapitre V

INTEGRALE CURVILIGNE

Session

1. Définition et calcul d' une intégrale curviligne

Nous supposons dans tout ce qui suit que n=2 ou n=3 et que tout champ de vecteur F et toute courbe C sont de classe au moins C^1 .

1.1 Introduction

Considérons un champ de vecteurs F défini dans un ensemble ouvert U. Supposons que F est un champ de force, le vent par exemple, et qu'un avion se déplace sur une courbe $C(t)$ d'un point $C(t_0)$ à un point $C(t_1)$.

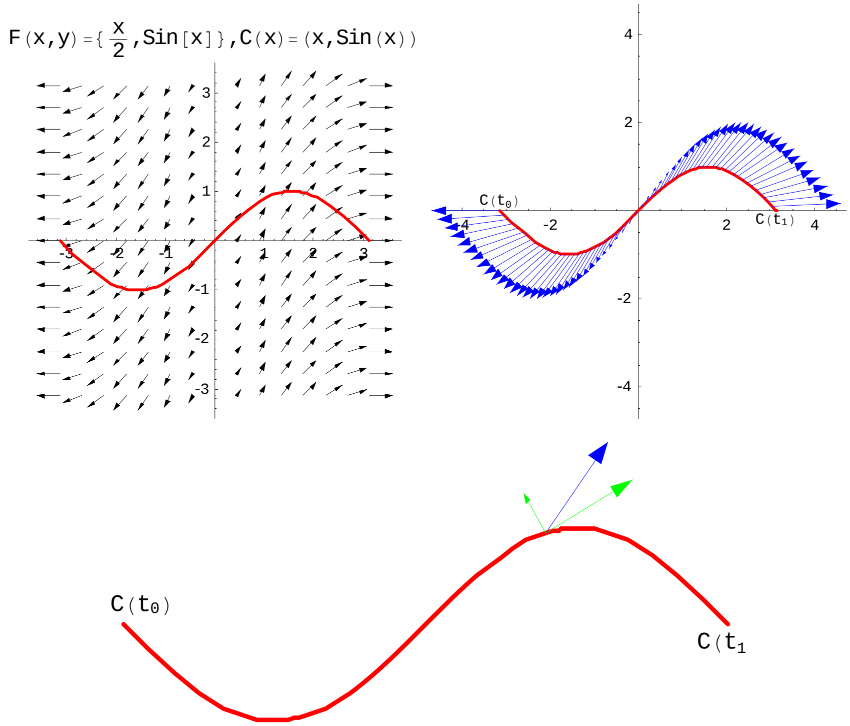


Figure 1

Pour calculer le travail de cet avion le long de cette courbe on calcule en fonction de t la composante des forces le long de la courbe F(C(t)).C'(t) et ensuite on intègre le résultat le long de cette courbe.

Définition

Soit U un ensemble ouvert, et F un champ vectoriel défini dans U. Soit C(t) une courbe dans U définie dans [a,b]. On appelle intégrale curviligne de F le long de C et on note $\int_C F$ intégrale:

$$\int_C F = \int_a^b F(C(t)).C'(t)dt$$

Le produit scalaire

F(C(t))•C'(t)

est une fonction de t et c'est la projection de F(C(t)) sur tangente C'(t), à la courbe C.

REMARQUE 1

Si C(a)=P et C(b)=Q on écrit aussi: $\int_C F = \int_{P,C}^{Q} F = \int_{P,C}^{Q} F(C(t)).dC(t)$

REMARQUE 2

Si F(C(t)) est le champ des vecteurs unitaires portés par les tangentes à la courbe C(t),

$$F(C(t))=\frac{(x'(t),y'(t))}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}$$

L'intégrale curviligne est interprétée comme étant la longueur de la courbe C

$$\int_C F=\int_a^b \frac{(x'(t),y'(t))}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}.(x'(t),y'(t))dt=\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=L$$

REMARQUE 3

Si le champ F et la courbe C sont donnés par:

$$F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))\ ;$$
$$C(t)=(x(t),y(t))\Rightarrow C'(t)dt=(x'(t)dt,y'(t)dt)=(dx,dy)$$

Alors: $\int_{P,C}^{Q} F=\int_{P,C}^{Q} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

1.2 Technique de calcul d'une intégrale curviligne

EXEMPLE 1

Calculer l'intégrale curviligne du champ vectoriel $F(x,y)=(xy,y^2)$ le long du segment joignant le point O(0,0) au point P(1,1).

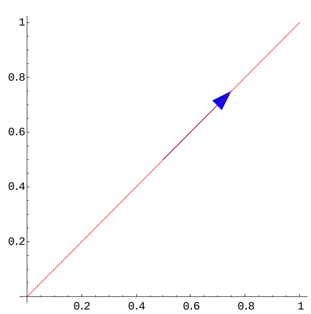


Figure 2

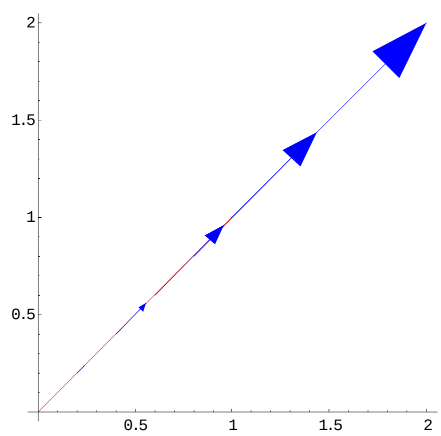


Figure 3

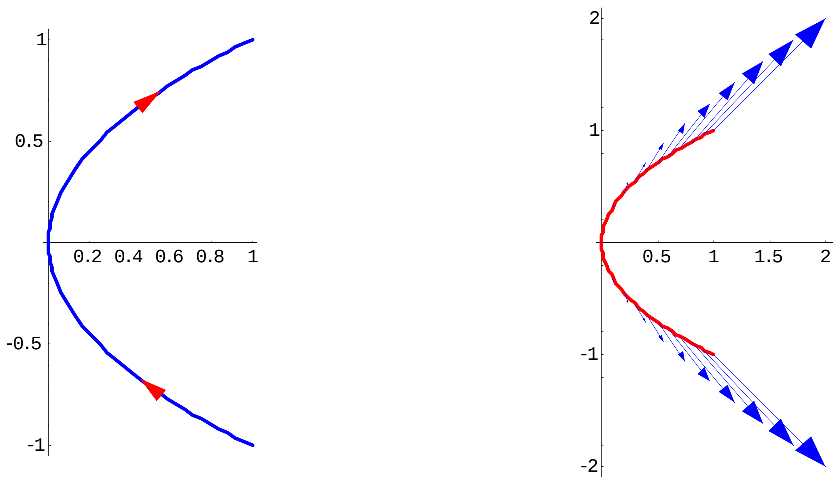
Le segment OP a pour représentation paramétrique :

$$C(t)=t\,P \quad\Rightarrow\quad C(t)=(t,t) \quad\Rightarrow\quad C'(t)=(1,1)$$

$$\Rightarrow \quad \int_C F=\int_0^1 (t^2,t^2).(1,1)dt=\frac{2}{3}$$

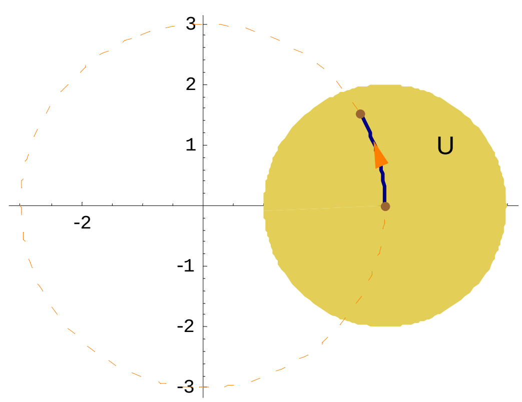
EXEMPLE 2

Trouver la circulation de $F(x,y)=(x^2,xy)$ le long de la parabole $x=y^2$ entre (1,-1) et (1, 1). $\Rightarrow \int_C F=\int_{-1}^{1}(t^4,t^3).(2t,1)dt=0$



EXEMPLE 3

Circulation du champ $G(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ le long du cercle de centre (0, 0) et de rayon 3 dans le sens trigonométrique du point (3, 0) au point $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.



L'intégrale curviligne entre (3, 0) et $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$ existe car si G(x, y) n'existe pas au point (0, 0), il existe bien un ouvert U contenant l'arc et dans lequel G(x, y) est différentiable..

L'équation paramétrique de l'arc de cercle en question.

$$C(\theta)=(3\cos\theta,3\sin\theta)\quad 0\le\theta\le \pi/6$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right); \text{ C(0)=(3, 0)}$$

$$\Rightarrow C'(\theta) = (-3\sin\theta, 3\cos\theta) \quad 0 \le \theta \le \pi/6$$

$$\Rightarrow G(C(\theta)) = \left(\frac{-3\sin\theta}{9}, \frac{3\cos\theta}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(-\sin\theta, \cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{3}(-\sin\theta, \cos\theta) \cdot (-3\sin\theta, 3\cos\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \int_C G = \int_0^{\pi/6} d\theta = \pi/6$$

CONCLUSION

On vient de redémontrer que :

$$\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = d\theta$$

1.3 Courbes fermées

Définition

Si la courbe est la réunion d'un nombre fini d'arcs de courbes $\{C_1, C_2, ..., C_m\}$ où C_i est défini sur $[a_i, b_i]$ tel que $C_i(b_i) = C_{i+1}(a_{i+1})$, nous définissons :

$$\int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F + ... + \int_{C_m} F$$

Nous dirons que la courbe C est fermée si $C_m(b_m) = C_1(a_1)$

EXEMPLE 4

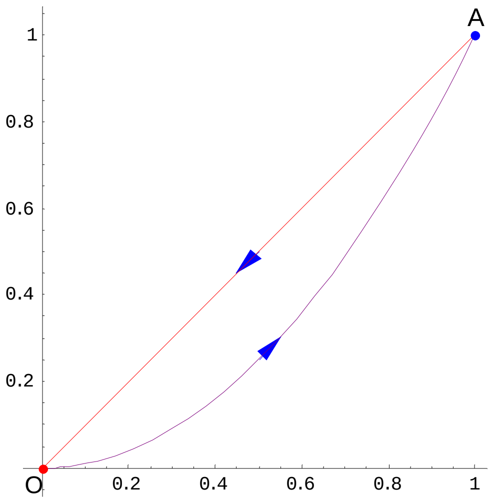
Soit

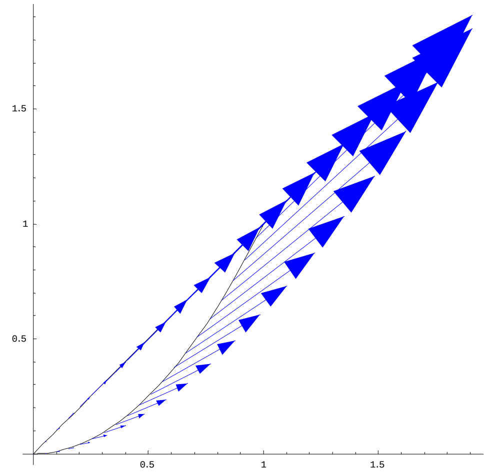
$$F(x, y) = (x^2, xy).$$

Calculer la circulation de F le long de la courbe fermée C constituée du segment de droite joignant le point (1, 1) au point (0, 0) et de l'arc de parabole

$$y = x^2$$

allant du point (0, 0) au point (1, 1).





$$\int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F = \frac{1}{15}$$

Calcul de $\int_{C_1} F$

$$y = x^2 \Rightarrow C(t) = (t, t^2); \quad 0 \le t \le 1 \Rightarrow C'(t) = (1, 2t)$$

$$F(x,y) = (x^2, xy) \Rightarrow F(C(t)) = (t^2, t^3)$$

$$F(C(t)).C'(t) = (t^2, t^3).(1, 2t) = t^2 + 2t^4$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} F = \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$$

Calcul de $\int_{C_2} F$

$$y = x \Rightarrow C(t) = (t, t); \quad \text{t:}1 \to 0 \;\Rightarrow C'(t) = (1,1)$$

$$F(x,y) = (x^2, xy) \Rightarrow F(C(t)) = (t^2, t^2)$$

$$F(C(t)).C'(t) = (t^2, t^2).(1,1) = 2t^2$$

$$\int_{C_2} F = \int_1^0 2t^2\,dt = -\frac{2}{3} \Rightarrow \int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F = \frac{11}{15} - \frac{2}{3} = \frac{1}{15}$$

1.4 Chemin inverse

Si dans l'exemple précèdent nous avions inverser le sens de parcourt sur C_1 et C_2 nous aurions obtenu pour réponse $-\frac{1}{15}$ (à vérifier). Nous admettrons les notations suivantes:

Si C est la courbe allant de P à Q, C^- serait la même courbe mais parcourue de Q à P.

Paramétrisons C^-. Si C(t) est la courbe définie sur [a, b] nous définissons $C^-(t)$ la courbe définie sur [a, b] par:

$C^-(t)=C(a+b-t)$

En effet

$C^-(a)=C(b)$; $C^-(b)=C(a)$

et lorsque t croit de a à b, a+b-t décroît de b à a. C^- n'est donc que C mais parcourue dans le sens inverse.

Lemme

Soit F un champ de vecteurs défini dans un ensemble ouvert U, et soit C une courbe définie sur [a,b]. Alors: $\int_{C^-} F = -\int_C F$

EN EFFET

$$\int_{C^-} F = \int_b^a F(C^-(t))\cdot C^-{}'(t)dt = \int_b^a F(C(a+b-t)).C'(a+b-t)dt$$

$$= \int_a^b F(C(u)).C'(u)(-du) = -\int_C F$$

2. Intégrale curviligne d'un champ dérivant d'un potentiel

On rappelle qu'un champ de vecteurs F est dit dérivant d'un potentiel s'il admet une fonction potentielle.

Théorème 1

Soit F un champ vectoriel dérivant d'un potentiel ϕ défini dans un ensemble ouvert U. Soit C une courbe dans U, joignant P à Q. Alors:

$$\int_{P,C}^{Q} F = \varphi(Q) - \varphi(P)$$

et l'intégrale de F est donc indépendante de la courbe C joignant P à Q.

EN EFFET

$$\int_{P,C}^{Q} F = \int_a^b F(C(t)).C'(t)dt = \int_a^b grad\varphi(C(t)).C'(t)dt$$

$$= \int_a^b \varphi_t'(C(t))dt = \varphi(C(t))\Big]_a^b = \varphi(Q) - \varphi(P)$$

Corollaire

Si F dérive d'un potentiel, l'intégrale curviligne de F le long de toute courbe fermée définie dans U est nulle.

En plus s'il existe un chemin fermé Γ tel que:

$$\int_{\Gamma} F \neq 0$$

on peut déduire que F n'admet pas de fonction potentielle dans U contenant Γ.

EXEMPLE 5

Soit $\quad F(x,y,z) = (2xy^3 z, 3x^2y^2z, x^2y^3)$

ici $\quad F(x,y,z) = grad(x^2y^3z)$,

d'où l'intégrale de F sur un chemin quelconque joignant P(1, -1, 2) à Q(-3, 2, 5) est::

$$\int_P^Q F = \varphi(Q) - \varphi(P) = \left[x^2y^3z\right]_P^Q = \left((-3)^2\ 2^3 5 - (-1)^3\ 2\right) = 362$$

Théorème 2

Soit U un ensemble ouvert connexe et F un champ de vecteurs définis sur U. Si étant donnés P et Q deux points quelconques de U, l'intégrale: $\int_{P,C}^{Q} F$ est indépendante de la courbe C dans U joignant P à Q, alors F admet une fonction potentielle dans U.

EN EFFET

Fixons un point P_0 de U et soit X un point courant de U. Posons :

$$\varphi(X) = \int_P^X F$$

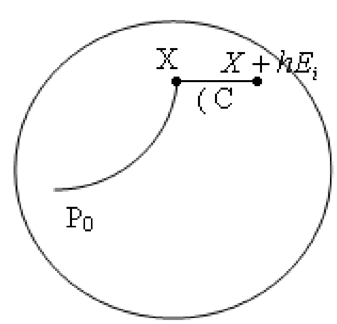
Cette intégrale étant indépendante du chemin joignant P à Q, nous ne le précisons pas dans l'écriture de φ(X). Supposons $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ et $E_i = (0, 0, ..., \overset{(i)}{1}, ..., 0)$ alors

$$F(X).E_i = f_i(X)$$

Montrons que F=gradφ i.e. $\forall i \;\; f_i(X) = D_i\varphi(X)$

Pour cela considérons le quotient de Newton:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(X+hE_i)-\varphi(X)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_P^{X+hE_i} F - \int_P^X F\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_P^X F + \int_X^{X+hE_i} F - \int_P^X F\right] \\ &= \frac{1}{h}\int_X^{X+hE_i} F\end{aligned}$$



Choisissons pour une courbe C joignant X à X+hE_i la droite joignant *X* à *X+hE$_i$*. Dans le cas d'un champ à 2 variables:

$$X + hEi = (x,y) + h(1,0) = (x+h, y) \text{ ou } X + hEi = (x,y) + h(0,1) = (x, y+h)$$

C a pour équation:

C(t) = X + t (X + hE$_i$ - X)=X + t hE$_i$ $\Rightarrow$ C'(t) = h E$_i$ avec $t \in [0,1]$

Or

$$\int_{X,C}^{X+hE_i} F = \int_0^1 F(C(t)).C'(t)dt$$

d'où

$$\frac{\varphi(X+hE_i)-\varphi(X)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_0^1 F(C(t)).hE_i dt\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int_0^1 f_i(X+htE_i)hdt\right]$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^h g(u)du$$

où $u = ht$ et $g(u) = f_i(X+htE_i)$. D'après le théorème fondamentale de l'intégration :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h g(u)du = g(0)$$

E posant : $G(h) = \int_0^h g(u)du \Rightarrow G'(h) = g(h) \Rightarrow G'(0) = g(0)$

Or $G'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{G(h)-G(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h g(u)du \Rightarrow G'(0) = g(0)$

Or $g(0) = f_i(X) \Rightarrow D_i\varphi(X) = f_i(X)$ **c.q.f.d.**

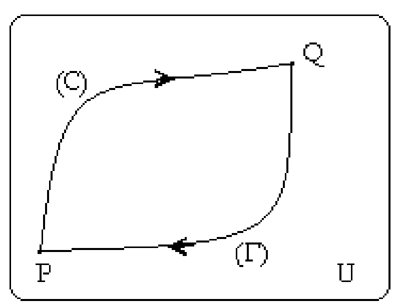
Théorème 3

Soit U un ensemble ouvert connexe et F un champ de vecteurs définis sur U. Si l'intégrale curviligne de F le long de toute courbe fermée contenue dans U est nulle , alors F admet une fonction potentielle dans U.

EN EFFET

Soient P et Q deux points quelconques de U, et soient deux courbes (C) et (Γ) joignant P à Q. La courbe $C \cup \Gamma^-$ est une courbe fermée joignant P à P. Donc:

$$\int_C F + \int_{\Gamma^-} F = 0 \Rightarrow \int_C F = \int_\Gamma F$$



Intégrale de P à Q est donc indépendante du chemin suivi et d'après le théorème 2 F admet une fonction potentielle dans U. **c.q.f.d.**

Théorème 4

Soit F un champ vectoriel défini dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $F = (f, g)$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Soit C le cercle de centre O(0,0) et de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique.

1$^{\text{er}}$ cas:

Si $\int_C F = 0 \Rightarrow$ F admet une fonction potentielle.

2$^{\text{ème}}$ cas:

Soit $k = \frac{1}{2\pi}\int_C F$ et $G(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Si $k = \frac{1}{2\pi}\int_C F \neq 0 \Rightarrow \exists \Phi : R^2 \to R$ tel que $F(x,y) = kG(x,y) + grad\Phi(x,y)$

3. Masses, centres d'inertie, moments d'inertie

3.1 Masse d'un fil

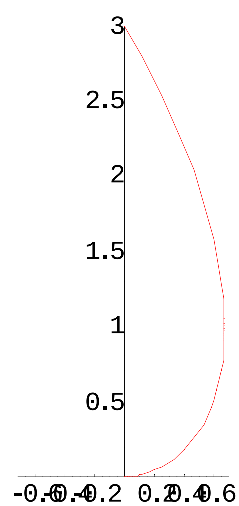
On appelle **fil** tout couple (C, ρ) où C est une courbe de classe C^1 par morceaux et $\rho : C \to R_+$ une application continue appelée la **densité linéaire** du fil.

On appelle masse d'un fil (C, ρ) le réel **m** défini par $m = \int_C \rho(M)\,ds$, où M décrit **C**.

3.1.1 Exemple

Calculer la masse d'un fil (C, ρ) où **C** est défini par :

$$C(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2\right); 0 \le t \le \sqrt{3} \text{ et } \rho(x) = 2t^2$$



$$m = \int_C \rho(t)\,ds = \int_0^{\sqrt{3}} \rho(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} 2t^2\sqrt{\left(1-t^2\right)^2 + 4t^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} 2t^2\left(1+t^2\right)dt = \frac{28\sqrt{3}}{5}$$

3.2 Centre d'inertie d'un fil

Le centre d'inertie d'un fil (C, ρ) est le point G de R^3 défini par :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_C x\rho(M)\,ds \\ y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_C y\rho(M)\,ds \\ z_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_C z\rho(M)\,ds \end{cases}$$

où M décrit C, s l'abscisse curviligne du point M sur C et m la masse du fil (C,ρ)

3.2.1 Exemple

Déterminer le centre d'inertie G du fil homogène (C,ρ) formé par la demi-cardioïde d'équation polaire $r = a(1+\cos\theta); 0 \le \theta \le \pi; a > 0$

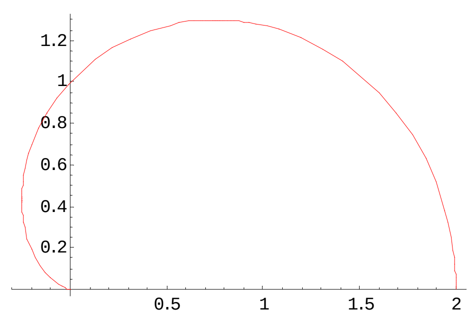
$$r = a(1+\cos\theta) \Rightarrow C(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$C(\theta) = \big(a(1+\cos\theta)\cos\theta, a(1+\cos\theta)\sin\theta\big)$$

$$\|C'(\theta)\| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$m = 2a\rho\int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 4a\rho$$

$$x_G = \frac{1}{m}\int_C x\rho(M)\,ds = \frac{\rho}{4a\rho}\int_0^\pi a(1+\cos\theta)\cos\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{4a}{5}$$



3.3 Moment d'inertie d'un fil

Soit H un point ou une droite ou un plan de R^3 ; pour tout point M de R^3, on note $d(M,H)$ la distance de M à H.

Le moment d'inertie d'un fil (C,ρ) par rapport à H est le réel I_H défini par :

$$I_H = \int_C \rho(M)\big(d(M,H)\big)^2\,ds$$

où M décrit C et s est l'abscisse curviligne de M sur C

3.3.1 Exemple

Calculer le moment d'inertie par rapport à O du fil (C,ρ) où :

$$C:\begin{cases} x = cost \\ y = \sin t; \qquad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \;; \qquad \rho(M) = 2 \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$$

On a :

$$I_O = \int_C 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds$$

$$= \int_C 2\left(\cos^2 t + \sin^2 t + t\right)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t}\,dt$$

t

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1+t)^{3/2}\,dt = \left[\frac{4}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{10}\left(-8+\sqrt{2}\,(2+\pi)^{\frac{5}{2}}\right)$$