Chapitre VI

Intégrales doubles

Part 1

1. Parties Quarrables

1.1. Pavés

On appelle **pavé fermé borné** de R² toute produit cartésien $P = I \times J$ où *I* et *J* sont des intervalles de R.

$P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ est un exemple d'un pavé fermé borné de R².

1.2. Parties pavable

On appelle **partie pavable** de R² toute réunion d'un nombre fini de pavés bornés de R².

1.3. Parties quarrables

Soit D une partie bornée de R². On note :

- $A^+(D)$ la borne inférieure des aires des parties pavables de R² contenant *D*.
- $A^-(D)$ la borne supérieure des aires des parties pavables de R² contenus dans *D*.

On dit que D est quarrable si et seulement si $A^-(D) = A^+(D)$; dans ce cas, on appelle **aire de** *D*, et on note $A(D)$ le réel défini par : $A(D) = A^-(D) = A^+(D)$

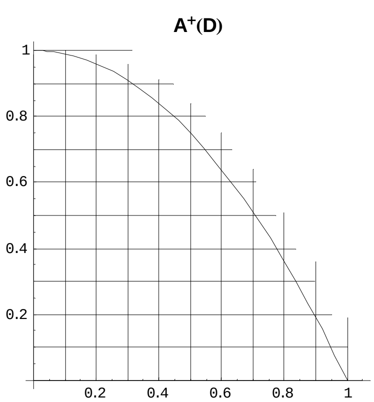


Figure 1

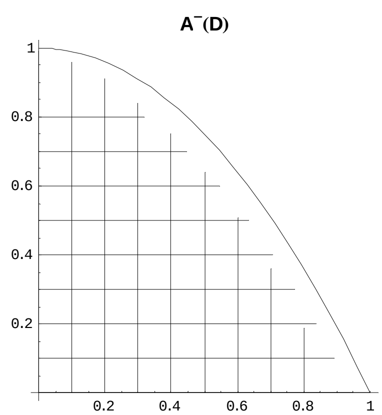


Figure 2

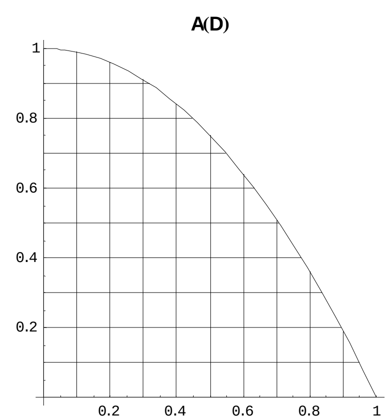


Figure 3

2. Intégrale Double

2.1. Définition

Soit f une fonction continue sur un rectangle U de R^2. U = [a, b]×[c, d]=I × J. Partageons l'intervalle I comme suit:

$$a = x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m = b$$

Nous notons $P_I = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ cette partition. De même partageons l'intervalle J en posant :

$$c = y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n = d$$

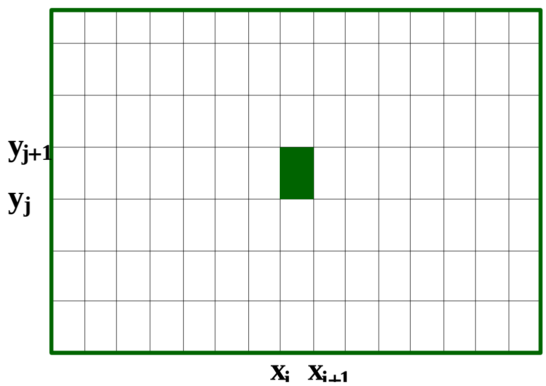


Figure 4

Nous notons $P_J = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ cette partition. Ainsi le rectangle U est partagé en sous-rectangle :

$$S_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

Nous avons :

Aire(U)=(d - c)(b - a) et $Aire(S_{ij}) = (y_{j+1} - y_j)(x_{i+1} - x_i)$

La fonction f étant continue sur le rectangle U, est continue sur tout sous-rectangle S_{ij} de U, et y est ainsi bornée. Ce qui entraîne l'existence de $\min_{\mathrm{S}_{\mathrm{ij}}}$ f et de $\max_{S_{ij}} f$. Posons:

$$W(P, f) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\max_{S_{ij}} f)(y_{j+1} - y_j)(x_{i+1} - x_i)$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\min_{S_{ij}} f)(y_{j+1} - y_j)(x_{i+1} - x_i)$$

Si v_{ij} est un point de S_{ij} tel que $f\left(v_{ij}\right)$ n'est ni un minimum ni un maximum de la fonction, alors la somme:

$$S(P,f)=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(v_{ij})(y_{j+1}-y_j)(x_{i+1}-x_i)$$

est nommée somme de **Riemann** relative à f. Nous avons alors les inégalités suivantes:

$$\min_{S_{ij}} f \le f\left(v_{ij}\right) \le \max_{S_{ij}} f \quad \Rightarrow \quad L(P,f) \le S(P,f) \le W(P,f)$$

Nous disons que f est intégrable sur U, si lorsque n et m tendent vers l'infini ces trois sommes tendent vers une même limite. Nous appelons cette limite intégrale double de f sur U et nous la notons:

$$\iint_U f = \iint_U f(x,y)dxdy$$

Théorème 1

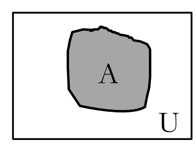
Soit U un rectangle. Toute fonction définie et continue dans U est intégrable dans U.

Théorème 2

Soit U un rectangle et soit f une fonction définie dans U, bornée et continue sauf peut-être sur un nombre fini de courbes de classe C1. Alors f est intégrable dans U.

Proposition

Soit A une région de R^2 dont la frontière est une courbe (ou la réunion d'un nombre fini de courbes de classe C^1). Si A est bornée (i. e pouvant être comprise dans un rectangle U) et si f est une fonction continue dans A alors f est intégrable sur A.



EN EFFET

Soit A une région de R^2 dont la frontière est une courbe (ou la réunion d'un nombre fini de courbes) de classe C^1 . A est supposée bornée donc pouvant être comprise dans un rectangle U. Soit f une fonction définie dans A.

Nous voulons calculer l'intégrale double de f sur A.. Pour cela prolongeons la fonction f sur tout le rectangle U, en posant:

$$f_U(P)=0 \qquad \forall P\in U-A$$
$$f_U(P)=f(P) \qquad \forall P\in A$$

La fonction f_U est continue dans U, sauf peut-être sur la frontière de A. qui est une courbe de classe C^1 . On pose alors $\iint\limits_A f = \iint\limits_U f_U$

Théorème 3

Toute application $f : D \to \mathbb{R}$ bornée et continue sur une partie quarrable D de R^2 est intégrable sur D.

2.2. Propriétés élémentaires de l'intégrale double

Théorème 4

Soient f et g deux fonctions définie et continues dans une partie quarrable U.

Alors $\iint_U (f+g) = \iint_U f + \iint_U g; \quad \iint_U kf = k\iint_U f; \quad k \in \mathbb{R}$

Théorème 5

Soient f et g deux fonctions définie et intégrables dans une partie quarrable U,

avec $\forall X \in U;\ f(X) \leq g(X) \Rightarrow \iint_U f \leq \iint_U g$

Théorème 6

Soit A une région bornée de R^2 , réunion de deux régions B et C n'ayant en commun qu'un nombre fini de courbes. Si f est une fonction définie et continue dans A sauf peut-être sur un nombre fini de courbes de classe C^1 alors

$$\iint_A f = \iint_B f + \iint_C f$$

Autrement dit : $A = B \bigcup C$ avec $\overset{\circ}{B} \bigcap \overset{\circ}{C} = \varnothing$

Théorème 7 (Inégalité de Cauchy Schwarz)

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur une partie quarrable D de R^2, alors f^2 et g^2 sont intégrables sur D et : $\left(\iint_D fg\right)^2 \leq \left(\iint_D f^2\right)\left(\iint_D g^2\right)$

3. Calcul d'une intégrale double

3.1. Calcul sur un pavé

Théorème 6

Soit f une fonction intégrable sur un rectangle (pavé) U=[a, b]×[c, d].
Si pour tout: $x \in [a,b]$ $f_x(y) = f(x,y)$ *est intégrable sur [c, d] alors:*

la fonction de x : $\int_c^d f(x,y)dy$ *est intégrable sur [a, b]*

et $\iint_U f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$

exemple

Calculer $\int_0^1 \int_0^1 x\,E^{xy}\,dy\,dx$ rép. $e-2$

Cas particulier

Soient

- $(a,b,c,d) \in R^4$ tel que $a \le b$ et $c \le d$
- $D = [a,b] \times [c,d]$
- $u : [a,b] \to R$ continue
- $v : [c,d] \to R$ continue

Alors l'application $f : D \to R$, définie par $f(x,y) = u(x)v(y)$ est intégrable sur D et :

$$\iint_D u(x)v(y)\,dxdy = \left(\int_a^b u(x)\,dx \right) \left(\int_c^d v(y)\,dy \right)$$

On dit alors que l'intégrale double est à variable séparée.

exemple

Calculer $\int_1^2 \int_{-3}^4 x^2 y dy dx = \left(\int_1^2 x^2 dx \right) \left(\int_{-3}^4 y dy \right)$ rép. $\frac{49}{6}$

3.2. Calcul sur un domaine quarrable

Théorème de Fubini

1ère Version

Soient : $(a,b) \in R^2$ tel que $a \le b$

- $g_1, g_2 : [a,b] \to R$, deux fonctions de classe C1 tel que $g_1 \le g_2$

- $D = \{(x,y) \in R^2; a \le x \le b \text{ et } g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$
- $f : D \to R$ continue

Alors

- D est quarrable
- f est intégrable sur D
- $\iint\limits_D f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$

Ceci montre que l'intégrale double se ramène à deux intégrales simples emboîtées.

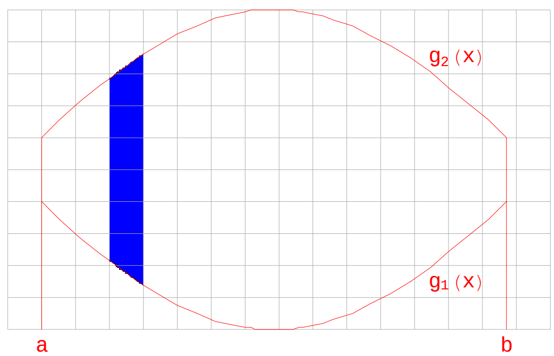


Figure 5

EXEMPLE

1. Calculer l'intégrale double de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le domaine $D = \{(x,y) \ / \ y = x > 0, \ y = x^2\}$

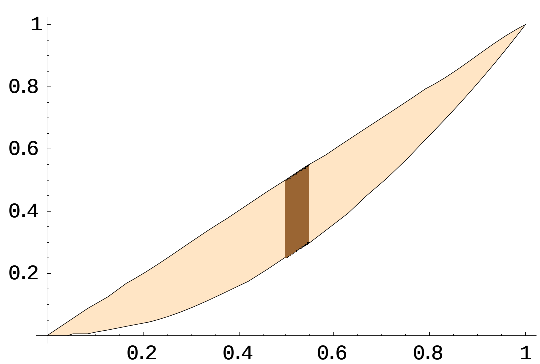


Figure 6

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dydx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left[x^2\left(x - x^2\right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) \right] = \frac{3}{35}$$

Théorème de Fubini

2ème Version

Soient :

- $(c,d) \in R^2$ tel que $c \leq d$
- $g_1, g_2 : [c,d] \to R$, deux fonctions de classe C1 tel que $g_1 \leq g_2$
- $D = \{(x,y) \in R^2 ; c \leq y \leq d \text{ et } g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$
- $f : D \to R$ continue

Alors

- D est quarrable
- f est intégrable sur D
- $\iint_D f = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$

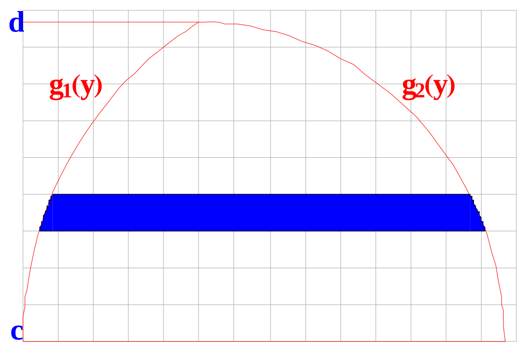


Figure 7

EXEMPLE

2. $f(x,y) = x^2y^2$ et D est limité par y=1, y=2, x=0, x= y. (rép. $7/2$)

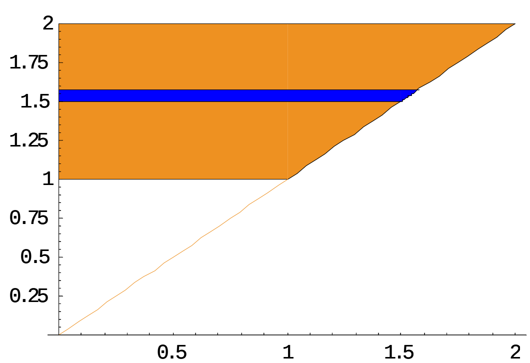


Figure 8

$$\int_1^2 \int_0^y x^2y^2 dxdy = \int_1^2 y^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^y dy = \int_1^2 \frac{y^5}{3} dy = \frac{7}{2}$$

3.3. Calcul d'aires

La surface d'un domaine A de R^2 est donnée par $S(A)=\iint_A dxdy$

EN EFFET

$$S(A)=\iint_A dxdy=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx=\int_a^b (g_2(x)-g_1(x))dx=\int_a^b g_2(x)dx-\int_a^b g_1(x)dx$$

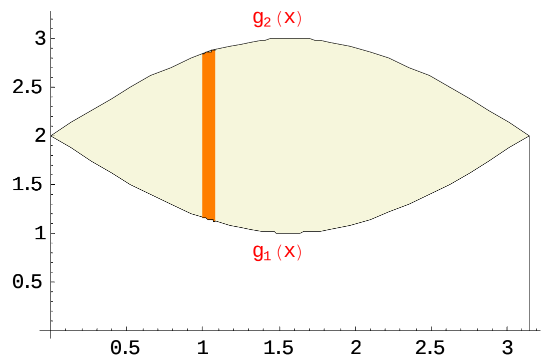


Figure 9

EXEMPLE

Calculer la surface du domaine borné par la droite y = x et la courbe $y=x^2$.

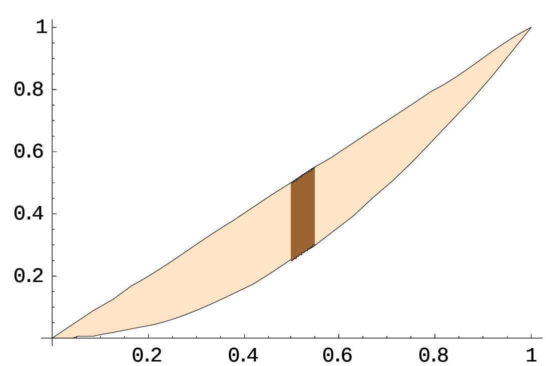


Figure 10

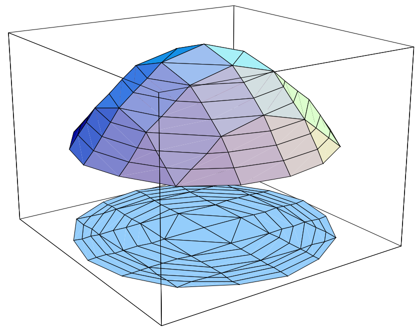
$$\iint_D dydx=\int_0^1\int_{x^2}^{x} dydx=\frac{1}{6}$$

3.4. Calcul de Volume

Si la fonction f(x, y) est positive pour tout (x, y) de U, et si f(x, y) représente une hauteur, l'intégrale double est alors interprétée comme étant le volume de la région de l'espace à trois dimensions située au-dessus de l'ensemble U et limitée supérieurement par le graphe de f.

Autrement dit, si f(x, y) est l'équation d'une surface S, le volume V compris entre la surface S et le plan xOy est donné par:

$$V=\iint_U f(x,y)dxdy$$



Exemple

$$D=\{(x,y)/0\le x+y\le 1\}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dydx \quad \text{Rép.}\frac{1}{6}$$

Cette intégrale est interprétée comme le volume compris entre la partie du plan z=1-x-y située au-dessus du triangle $0\le x+y\le 1$ et le plan xOy.

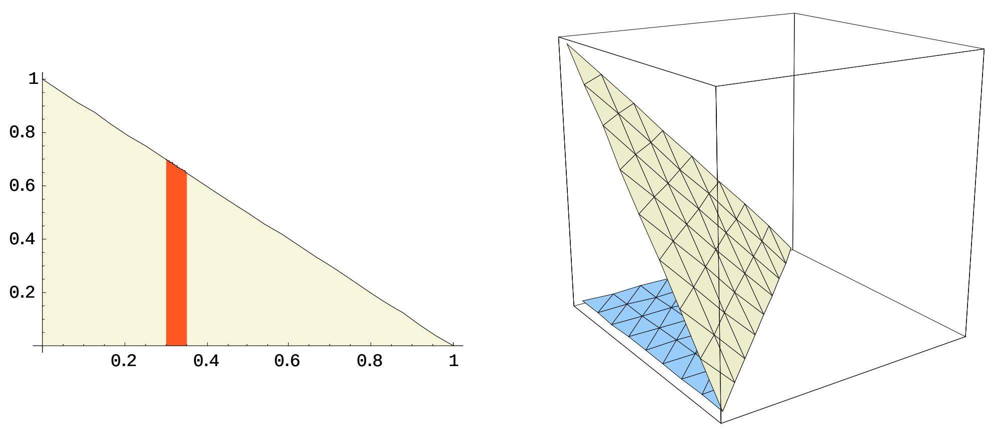


Figure 11

Part 2

4. Changement de variables dans une intégrale double.

4.1. Coordonnées quelconques.

Soit f une fonction des deux variables x et y définie sur un ensemble ouvert U. Supposons que x = x(u, v) et y = y(u, v) sont deux fonctions de classes C^1 sur U. Le jacobien de la transformation de $(x,y)\to(u,v)$ est par définition le déterminant:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=x'_u y'_v-x'_v y'_u$$

On note : $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

On démonte que :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D*} f\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right)\right)\left|J\right|dudv$$

4.2. Fonction composée

- On démontre aussi que si J est le jacobien de la transformation $\left(x,y\right) \to \left(u,v\right)$ alors le jacobien de la transformation $\left(u,v\right) \to \left(x,y\right)$ est $\dfrac{1}{J}$
- On démontre de même que le jacobien J de la transformation : $\left(x,y\right) \to \left(u,v\right) \to \left(s,t\right)$ est :

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \times \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$$

4.3. Changement de variables affine

$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$ avec $\left(a,b,c,d\right) \in R^4, ad - bc \neq 0$

$$\Rightarrow\ J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\ \Rightarrow\ \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D*} f^*(u,v)\left|ad - bc\right|dudv$$

EXEMPLE

Calculer l'intégrale double de la fonction $f\left(x,y\right) = x$ sur le pavé : $D = \left[-1,1\right] \times \left[-1,1\right]$

Effectuons un changement de variables

$$\begin{cases} x = -u \\ y = +v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1; b = 0 \\ c = 0; d = +1 \end{cases} \Rightarrow\ J = -1 \Rightarrow \left|J\right| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = \left\{-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\right\} \\ D^* = \left\{-1 \leq u \leq 1; -1 \leq v \leq 1\right\} \end{cases}$$

$$\iint_D xdxdy = \iint_{D*} -u\left|-1\right|dudv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -ududv = \left(\int_{-1}^{1} dv\right)\left(\int_{-1}^{1} -udu\right) = 2 \times 0 = 0$$

4.4. Coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta;\quad y = r\sin\theta \;\Rightarrow\quad J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2};\;\; \theta = ArcTan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$$

$$J_1 = \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ \dfrac{-y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{1}{r} = \frac{1}{J}$$

EXEMPLE

1. Soit à calculer l'aire d'un disque de rayon a: Nous savons que : $S = \iint_D dxdy$

$$\Rightarrow\; S = \iint_D dxdy = \iint_{D^*} |J|\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a r drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} d\theta = \pi a^2$$

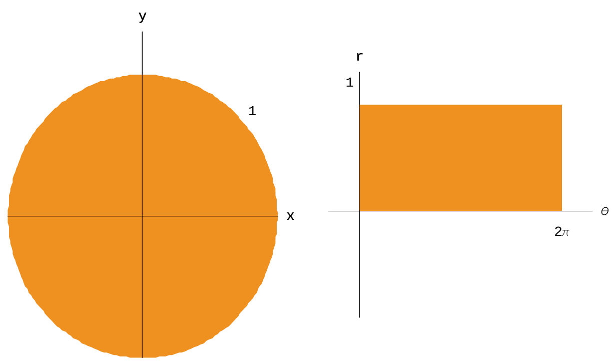


Figure 12

2. Calculer l'intégrale double de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le domaine $D = \{(x,y) \in R^2; x \geq 0, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$

En passant en coordonnées polaires on trouve :

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r\sin\theta \leq 0 \Leftrightarrow r \leq 2\sin\theta$$

$$\Rightarrow D^* = \left\{(r,\theta) \in R^2; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\sin\theta\right\}$$

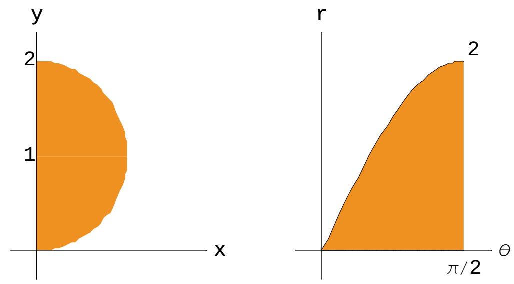


Figure 13

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint_{D^*}\left(r^2\right)|\,J\,|\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta} r^3 drd\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)^2\,d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

5. Exemples divers

3. *f(x, y) = 2x y* et D est le triangle déterminé par y = x, x+y=2 et x = 0.

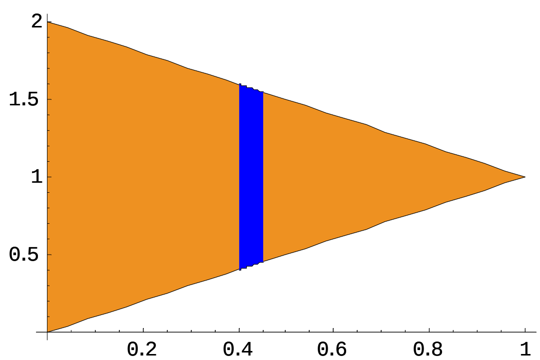


Figure 14

$$\int_0^1\int_x^{2-x} 2xydydx = \int_0^1 x\left[y^2\right]_x^{2-x} dx = 2\int_0^1 x(2-2x)\,dx = \frac{2}{3}$$

4. $f(x,y) = |x|,\quad D = \{(x,y)\,/\,-2 \le x \le 1;\ 0 \le y \le |x|\}$ (rép. 3)

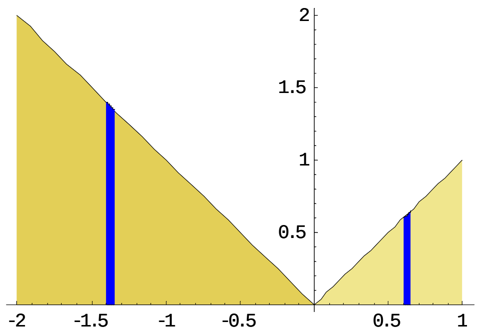


Figure 15

5. $f(x,y)=|y|$, D = $\{(x,y)/-2\leq x\leq 0;\ |x|\leq|y|\leq 2\}$ (rép. $16/3$)

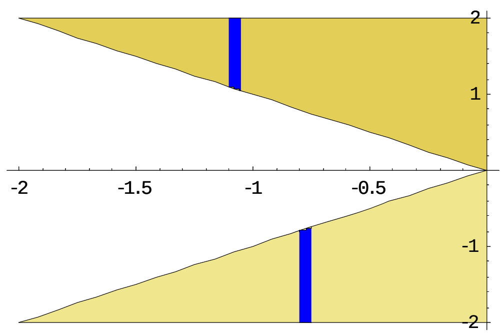


Figure 16

$$\int_{-2}^{0}\int_{-x}^{2} y\,dy\,dx+\int_{-2}^{0}\int_{-2}^{x} -y\,dy\,dx=\frac{16}{3}$$

Part 3

6. Intégrale double sur un domaine admettant un élément de symétrie

Etudions l'intégrale:

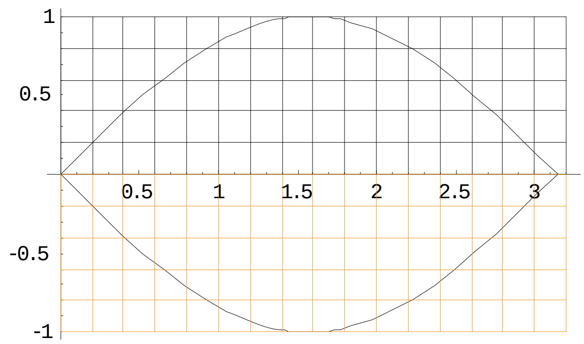
$$I=\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

où Δ est un domaine admettant, soit un centre de symétrie, soit un axe de symétrie (droite ou oblique).

a) Si, la fonction f associe deux nombres opposés à deux points P et P' symétriques on a I = 0

$$f(P)=-f(P')\Rightarrow I=\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy=0$$

En effet, dans le calcul de l'intégrale double I comme limite de sommes σ on peut se limiter a des subdivisions (d) formées de domaines deux à deux symétriques et convenir de choisir, dans deux domaines symétriques, deux points symétriques; on obtient ainsi $\sigma(d) = 0$ pour toutes les subdivisions (d) considérées. On en déduit $I=0$.



Domaine qui admet l'axe des x comme axe de symétrie avec une fonction f vérifiant

$$f(P) = -f(P') \;\; ; \;\; I = \int_0^{\pi}\int_{-\sin x}^{\sin x} \frac{xy}{2}\,dy\,dx = 0$$

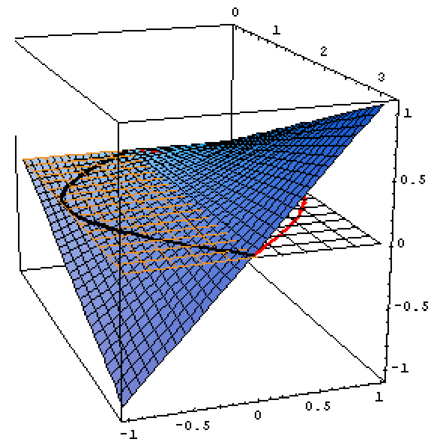


Figure 17

b) Si, la fonction f associe deux nombres égaux à deux points P et P' symétriques, on démontre de la même façon,

$$f(P) = f(P') \Rightarrow I = 2\iint_{\Delta'} f(x,y)dxdy$$

Δ' désignant un sous-ensemble de Δ tel que, Δ'' désignant l'homologue de Δ' dans la symétrie considérée, les domaines Δ' et Δ'' soient disjoints et $\Delta' \cup \Delta'' = \Delta$

Domaine qui admet l'axe des x comme axe de symétrie avec une fonction f vérifiant $f(P) = f(P')$;

$$I = \int_0^{\pi}\int_{-\sin x}^{\sin x}\left|\frac{xy}{2}\right|dydx$$

$$I = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x}\left|\frac{xy}{2}\right|dydx = \frac{\pi^2}{8}$$

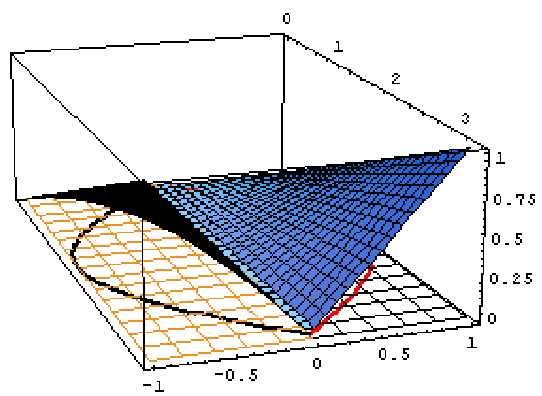


Figure 18

7. Calcul de l'intégrale double par utilisation des courbes de niveau.

Théorème

Si le domaine d'intégration Δ est engendré par des courbes de niveau $f(x,y) = t$ de la fonction f alors:

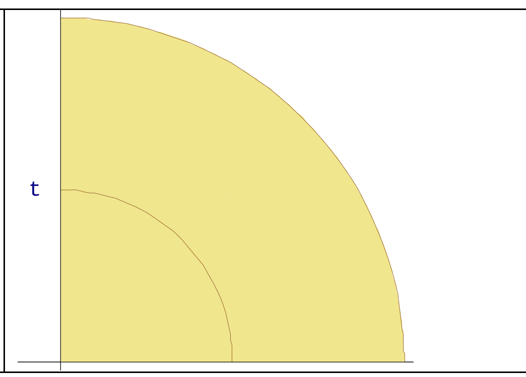
$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_{t_0}^{t_1} t\,dA(t)$$

où A(t) est la surface de Δ exprimée en fonction de t.

Exemple

Calculer $\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy$ où :

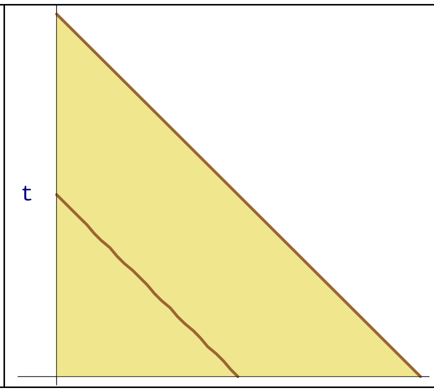
Δ est le cercle $0 \le x^2 + y^2 \le 1$, et $f(x,y) = x^2 + y^2$



Calculer $\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy$ où :

Δ est le triangle $0 \le x + y \le 1$,

$f(x,y) = x + y$

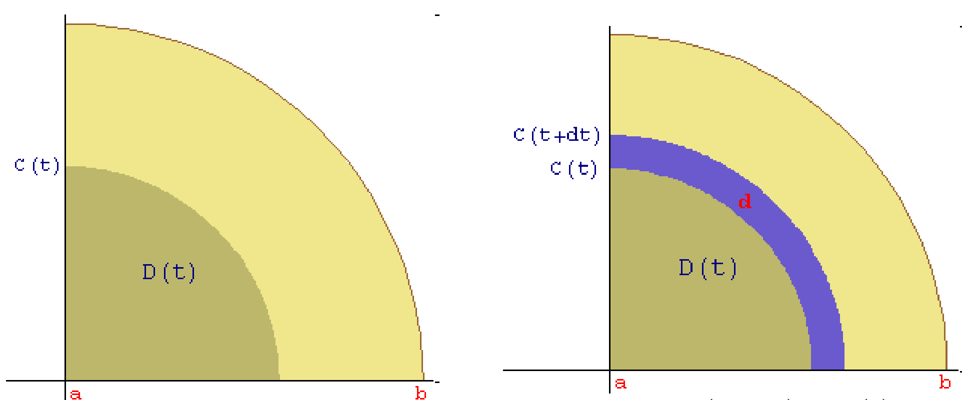


DÉMONSTRATION

Soit f une fonction de deux variables définie sur un domaine Δ.

Notons C(t) la courbe définie par $f(x,y) = t$. Nous supposons que :

- Δ est engendré par les courbes C(t) lorsque t croit de a à b.
- D(t) est la partie du domaine comprise entre C(a) et C(t).



$\Delta = D(b)$ $\qquad$ $d = D(t+dt) - D(t)$

Figure 19

Posons : $A(t) = \iint_{D(t)} dxdy = aire\,de\,D(t)$ et $d = D(t+dt) - D(t)$

Alors : $A(t+dt) - A(t) = \iint_{d} dxdy = aire\,de\,d$

Posons : $F(t) = \iint_{D(t)} f(x,y)dxdy$.

Alors : $F(b) = \iint_{\Delta} f(x,y)dxdy$ = L'intégrale à calculer

$F(a) = 0$

Appliquons la relation de Chasles Nous avons :

$$F(t+dt)-F(t)=\iint_d f(x,y)dxdy$$

Pour tout (x,y) de « d » nous avons:

$$t \le f(x,y) \le t+dt$$

$$\Rightarrow \iint_d tdxdy \le \iint_d f(x,y)dxdy \le \iint_d (t+dt)dxdy$$

$$\Rightarrow \quad t\iint_d dxdy \le \iint_d f(x,y)dxdy \le (t+dt)\iint_d dxdy$$

$$\Rightarrow t\big(A(t+dt)-A(t)\big) \le F(t+dt)-F(t) \le (t+dt)\big(A(t+dt)-A(t)\big)$$

$$\Rightarrow \quad t\left(\frac{A(t+dt)-A(t)}{dt}\right) \le \frac{F(t+dt)-F(t)}{dt} \le (t+dt)\left(\frac{A(t+dt)-A(t)}{dt}\right)$$

On en déduit lorsque dt tend vers zéro : $F'(t)=t\,A'(t)$

$$F'(t)=tA'(t) \Rightarrow \int_a^b F'(t)dt=\int_a^b tA'(t)\,dt \Rightarrow F(b)-F(a)=\int_a^b tdA(t)$$

Or $F(a)=0 \Rightarrow F(b)=\int_a^b tdA(t) \Rightarrow$ et comme $F(b)=\iint_\Delta f(x,y)dxdy$

$$\Rightarrow \quad \iint_\Delta f(x,y)dxdy=\int_a^b tdA(t)$$ **c.q.f.d.**

Exemple 1

Soit à calculer $\iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy$ où Δ est le disque $0<x^2+y^2 \le a^2$

$$\iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy=\int_0^a t^2 d(\pi t^2)=2\pi\int_0^a t^3 dt=\frac{\pi a^4}{2}$$

Exemple 2

Calculer $I=\iint_\Delta \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$; Δ étant défini par $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 \le 0$.

Les courbes de niveau $f(x,y)=t$ engendrent le domaine Δ quand t croit de 0 à 1.

A(t) = πabt. ⇒ A'(t) = πab $\Rightarrow I=\int_0^1 t\pi ab dt=\frac{\pi ab}{2}$

8. Masse , Centre d'inertie, Moment d'inertie

8.1. Masse d'une plaque plane

On appelle **plaque plane** tout couple (D, ρ) où **D** est une partie quarable de R^2 et $\rho : D \to R_+$ une application continue appelée **densité superficielle** de la plaque D.

On appelle masse d'une plaque plane (D, ρ) le réel m défini par $m = \iint_D \rho(M)\, dxdy$, où $M(x, y)$ décrit (D, ρ)

Exemple

Calculer la masse d'une plaque plane définie par $f(x) = \sin(x); 0 < x < \pi$ et $\rho(x, y) = 2.5x$ la densité superficielle.

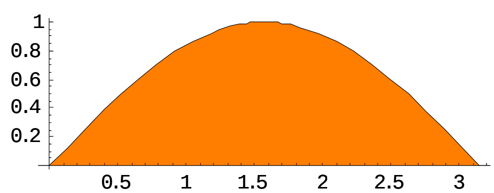


Figure 20

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dydx = \int_0^\pi \int_0^{Sinx} 2.5x dydx = \int_0^\pi 2.5x \sin x dx = \frac{5\pi}{2}$$

8.2. Centre d'inertie d'une plaque plane

Le centre d'inertie d'une plaque plane (D, ρ) de R^2 est le point G de R^2 défini par :

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)\, dxdy$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)\, dxdy$$

où (x, y) décrit D et m la masse de (D, ρ).

Exemple

Trouver le centre d'inertie de la plaque précédente.

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)\, dxdy = \frac{2}{5\pi} \int_0^\pi \int_0^{Sinx} 2.5x^2 dydx = \frac{\pi^2 - 4}{\pi}$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dxdy = \frac{2}{5\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{Sinx} 2.5xydydx = \frac{\pi}{8}$$

8.3. Moment d'inertie d'une plaque plane

Soit H un point ou une droite de R^2; pour tout point M de R^2, on note $d(M,H)$ la distance de M à H.

Le moment d'inertie d'un fil (D,ρ) de R^2 par rapport à H est le réel I_H défini par :

$$I_H = \iint_D \rho(M)\left(d(M,H)\right)^2 dxdy$$

où $M(x,y)$ décrit D .

EN PARTICULIER :

Le moment d'inertie de D par rapport à l'axe des x est donné par :

$$I_x = \iint_D y^2\rho(M)\,dxdy$$

Le moment d'inertie de D par rapport à l'axe des y est donné par :

$$I_y = \iint_D x^2\rho(M)\,dxdy$$

Enfin le moment d'inertie de D par rapport à l'origine des axes O est donné par :

$$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\rho(M)\,dxdy$$

Exemple

Calculer le moment d'inertie par rapport à x'Ox de la plaque homogène D formée du disque de centre O et de rayon R.

En passant en coodonnées polaires le disque devient : $D = \{0 \le \theta \le 2\pi; 0 \le r \le a\}$

$$I_x = \rho\iint_D y^2 dxdy = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3\sin^2\theta\,drd\theta = \frac{\pi}{4}a^4\rho$$