Chapitre VII

Théorème de Green

1 Premier énoncé

Théorème de Green (Premier énoncé)

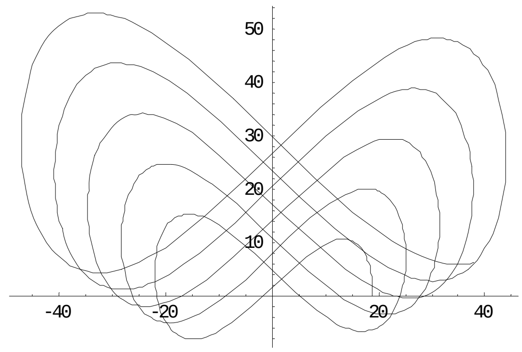
Soient P et Q deux fonctions définies et de classe C^1 dans une région A du plan, qui est l'intérieur d'un contour fermé C., orienté dans le sens trigonométrique. Alors :

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

NOTONS QUE:

La démonstration du théorème de Green dans le cas général n'est pas facile parce que la notion "d'intérieur" d'un contour fermé n'est pas rigoureuse, surtout quand le tracé du contour n'est pas simple. Nous allons pour cela, donner la démonstration dans des cas particulier.

Lequel est l'intérieur?



PREMIER CAS

Supposons que la région soit donnée par les inégalités suivantes:

$$\forall x \;\; / \;\; a \le x \le b; \Rightarrow g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

Le contour de A est ainsi formé de quatre courbes: deux segments verticaux, x = a et x = b; et deux courbes $g_1(x)$ et $g_2(x)$, dont les équations paramétriques sont:

$$C_1(t) = (t, g_1(t)); \quad a \le t \le b$$

$$C_2(t) = (t, g_2(t)); \quad t : b \to a$$

$$C_3(t) = (a, t); \quad t : g_2(a) \to \mathrm{g}_1(a)$$

$$C_4(t) = (b, t); \quad \mathrm{g}_1(b) \le t \le g_2(b)$$

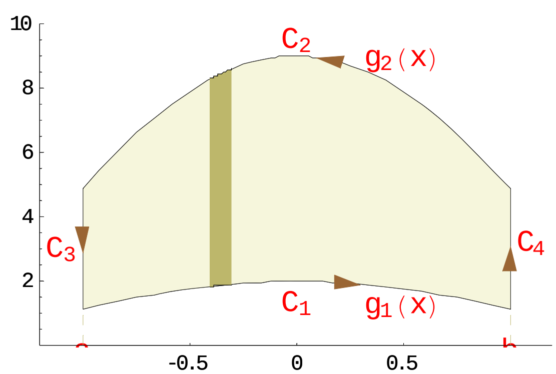


Figure 1

Dans ce cas la nous pouvons seulement démontrer la moitié du théorème de Green à voir

$$\int_{C^+} P(x,y)dx = \iint_A -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dydx$$

DEMONSTRATION

$$\iint_A -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dydx = -\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = -\int_a^b [P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))]dx$$

$$= -\int_a^b P(x,g_2(x))dx + \int_a^b P(x,g_1(x))dx = \int_{C_2} P(x,y)dx + \int_{C_1} P(x,y)dx$$

D'une autre part : $x = b \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow \int_{C_4} Pdx = 0$

De même : $x = a \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow \int_{C_3} Pdx = 0$

Or le contour de A est formé de: $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ D'où :

$$\int_{C^+} Pdx = \int_{C_1} Pdx + \int_{C_2} Pdx + \int_{C_3} Pdx + \int_{C_4} Pdx = \int_{C_2} Pdx + \int_{C_1} Pdx = -\iint_A \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dydx$$

DEUXIEME CAS

De la même manière nous démontrerons que si un domaine est donné par:

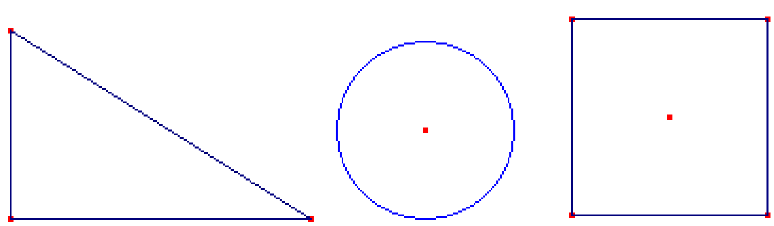
c ≤ y ≤ d; $g_1(y) \le x \le g_2(y)$

Alors :

$$\int_{C^+} Q(x,y)dy = \iint_A \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$$

REMARQUE

En particulier, si une région satisfait les conditions du premier cas et celles du deuxième cas, alors le théorème entier est vérifié.



EXEMPLE 1

Calculer la circulation du champ F(x, y) = (y + 3x, 2y - x) le long de l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ dans le sens trigonométrique.

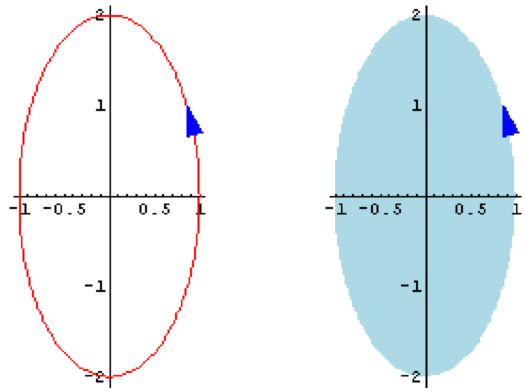


Figure 2

Posons : $P(x, y)= y + 3x$ et $Q(x, y)=2y - x$.

Ainsi $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \ \ et \ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$

P et Q étant de classe C^1 à l`intérieur de l'ellipse, on peut donc utiliser le théorème de Green :

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_A (-2)dydx = -2 \times Aire(A)$$

EXEMPLE 2

Calculer la circulation du champ $F(x, y) = \left(3xy, x^2\right)$ le long du rectangle [-1,3]×[0,2] dans le sens trigonométrique.

P et Q sont de classe C^1 à l`intérieur du rectangle, on peut donc utiliser le théorème de Green :

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_A (2x - 3x)dydx = \int_{-1}^{3} -xdx \int_0^2 dy = -8$$

2 Énoncé général

Définition

Considérons une région A dont la frontière est constituée d'un nombre fini de courbes qui se coupent seulement en leurs points limites. Soit C une de ces courbes. Nous disons que A se trouve à gauche si une voiture traversant le cercle dans le sens indiqué, la surface A se trouve à gauche du chauffeur.

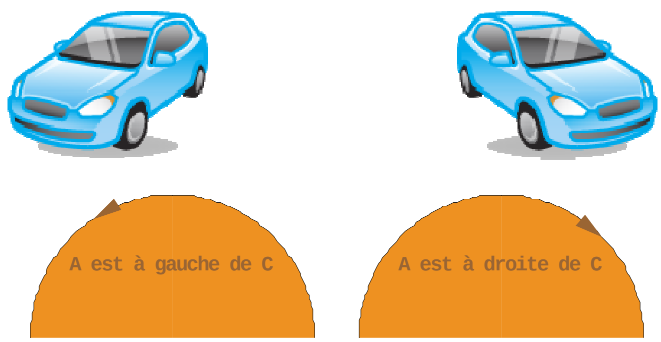


Figure 3

Théorème de Green (Énoncé général)

Soit A une région du plan dont la frontière C est constituée d'un nombre fini de courbes. Supposons que chacune de ces courbes est orientée de façon que A soit à sa gauche. Soient P et Q deux fonctions définies et de classe C^1 dans A, alors

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

EXEMPLE 3

Soit A l'anneau compris entre deux cercles concentriques C et S, orienté dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

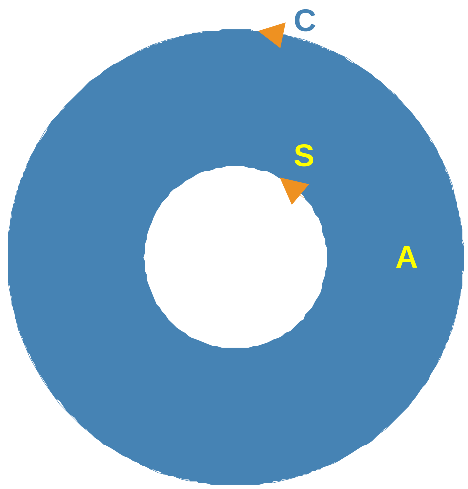


Figure 4

A se trouve à gauche de C, mais à droite de S. Pour pouvoir appliquer le théorème de Green, il faut considérer que la frontière Γ de A est constituée de {C+, S–}.

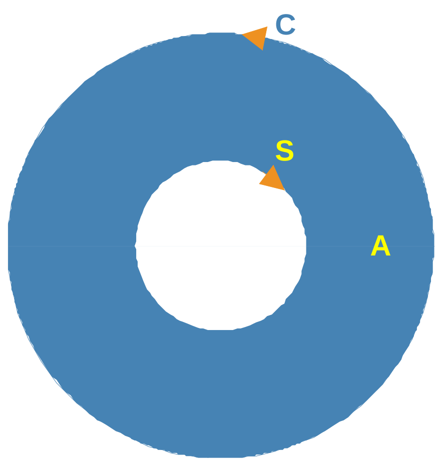


Figure 5

D'où:

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx = \int_{C^+} Pdx + Qdy + \int_{S^-} Pdx + Qdy$$

Remarque importante

Si la courbe Γ frontière d'une région A est constituée de deux courbes C et S, tel que l'une se trouve à l'intérieur de l'autre, et si un champ (P,Q) vérifie :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

dans A, alors:

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_{S^+} Pdx + Qdy$$

EXEMPLE 4

Soit $G(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$, Nous voulons calculer la circulation de G le long de la courbe S dans le sens trigonométrique.

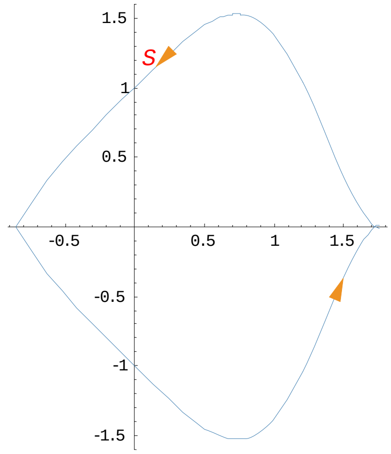


Figure 6

Ce calcul n'est pas simple. Mais G vérifie :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Traçons alors un cercle C de centre O et de rayon quelconque (petit).Orientons C négativement de façon que A soit à sa gauche. Soit A la région comprise entre S et C.

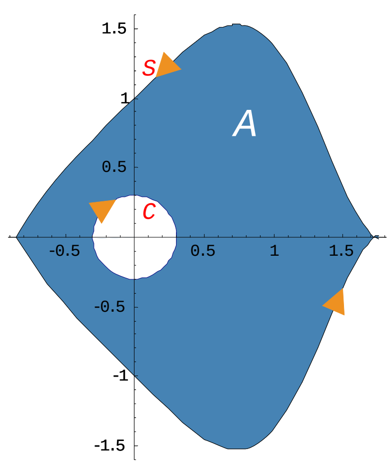


Figure 7

En appliquant le théorème de Green, nous trouvons:

$$0 = \int_{S^+} G + \int_{C^-} G \Rightarrow \int_{S^+} G = \int_{C^+} G$$

Or $\int_{C^+} G = 2\pi$, déjà calculé.$\Rightarrow \int_{S^+} G = 2\pi$

Que peut-on conclure ?

3 Divergence et rotationnel

3.1 Rotationnel

Etant donné un champ $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ et une courbe fermée C du plan. Soit u le vecteur unitaire porté par la **tangente.** Montrons que :

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{C^+} \mathrm{F.u\,ds}$$

Autrement dit :

$$\iint_A rotF(x,y) dxdy = \int_{C^+} \mathrm{F.uds}$$

DÉMONSTRATION :

Nous savons, en se rappelant la longueur d'une courbe, que: $ds = \|C'(t)\| dt$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{C'(t)}{\|C'(t)\|} \Rightarrow C'(t) = u(t)\|C'(t)\|$$

$$\Rightarrow C'(t)dt = u(t)\|C'(t)\|dt = u(t)ds$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} F(C(t)).C'(t)dt = \int_{C^+} F(C(t)).u(t)ds$$

En appliquant le théorème de Green :

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{C^+} F(C(t)).C'(t)dt = \int_{C^+} F.uds$$ **c.q.f.d.**

3.2 Divergence

Etant donné un champ $F(x,y,z)=(P,Q,R)(x,y,z)$. On appelle divergence de F et on note divF la quantité:

$$divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Si le champ est défini dans R² par $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ on aura :

$$divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

Soit n le vecteur unitaire porté par la **normale** à une courbe C du plan. Montrons que :

$$\iint_A divFdxdy=\int_{C^+}F.nds$$

DÉMONSTRATION :

Remarquons que :

$$C'(t)=(x'(t),y'(t))\Rightarrow N(t)=(y'(t),-x'(t))\Rightarrow\|N(t)\|=\|C'(t)\|$$

$$\Rightarrow n(t)=\frac{N(t)}{\|N(t)\|}\Rightarrow N(t)=n(t)\|N(t)\|$$

$$\Rightarrow N(t)dt=n(t)\|N(t)\|dt=n(t)\|C'(t)\|dt=n(t)ds$$

Alors :

$$\begin{aligned}\iint_A\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)&=\int_{C^+}(-Q,P).(x'(t),y'(t))dt\\&=\int_{C^+}(P,Q).(y'(t),-x'(t))dt\\&=\int_{C^+}F.N(t)dt\\&=\int_{C^+}F.n(t)ds\end{aligned}$$