T.D. 10 - Intégrale Impropre

1. Etudier la nature des intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{Logt}{(1+t)^2}dt$

$\forall t \in [0,1]; Logt < 0 \Rightarrow f(t) = \dfrac{Logt}{(1+t)^2} < 0$

Posons alors $g(t) = -\dfrac{Logt}{(1+t)^2}$

Considérons $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{g(t)}{-Logt} = 1 \Rightarrow \int_0^1 g(t)dt$ et $-\int_0^1 Logtdt$ ont même nature.

Or $-\int_0^1 Logtdt = -\lim\limits_{t\to 0}[tLogt - t]_0^1 = 1 \Rightarrow \int_0^1 g(t)dt$ est convergente

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x}dx$

$\forall x \in [0,1],\ \dfrac{1}{e^x - \cos x} > 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{e^x - \cos x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1}{x}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ est divergente

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x}dx$ divergente

c) $\displaystyle\int_{-1}^0 t^2 Log|t|dt$

$u = -t \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^0 t^2 Log|t|dt = \int_0^1 u^2 Log|u|du$

Cette intégrale est une intégrale définie car $\lim\limits_{u\to 0} u^2 Log|u| = 0$

d) $\int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt$

Ici il y a 2 points singuliers 0 et 1

$$I=\int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{1/2} \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt+\int_{1/2}^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt=I_1+I_2$$

Etude de I_1

$$f(t)=\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\Rightarrow \lim_{t\to 0} tf(t)=1$$

Comme $\int_0^{1/2}\frac{1}{t}dt$ est divergente $\Rightarrow I_1=\int_0^{1/2}\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt$ divergente

Etude de I_2

$I_2=\int_{1/2}^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt \sim \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}dt$ Intégrale de 2^{nde} espèce convergente

---

e) $\int_{-1}^0 \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}dt$

$$e^t \underset{0}{\sim} 1+t \Rightarrow \sqrt{1-e^t}\underset{0}{\sim}\sqrt{-t}$$

$$\Rightarrow f(t)\underset{0}{\sim}\frac{1+t}{\sqrt{-t}}\underset{0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{-t}}\Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}dt\underset{0}{\sim}\int_{-1}^0\frac{dt}{\sqrt{-t}}$$

$\Rightarrow \int_{-1}^0\frac{dt}{\sqrt{-t}}$ intégrale puissance de 2^{nde} espèce convergente car $p=\frac{1}{2}<1$

---

f) $\int_0^1 \frac{Logx}{\sqrt{x}}dx$

$\lim_{x\to 0} - \frac{x^{3/4}Logx}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0} = x^{1/4}Logx=0$ $\Rightarrow$ Intégrale convergente

---

g) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}dx$

1 est un point singulier

$$f(x)=\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}=\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}\underset{1}{\sim}\frac{1}{4\sqrt{(1-x)}}$$

$\int_0^1\frac{dx}{4\sqrt{(1-x)}}$ convergente $\Rightarrow$ $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}dx$ convergente

h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$

Intégrons par partie : $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow du = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x^{3/2}}$; $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx = -\sin 1 + K$$

$\frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \le \frac{1}{x^{3/2}}$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ est convergente $\Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ convergente

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ convergente

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}(e^{\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t})dt$

Posons $u = \frac{1}{t} \Rightarrow du = -\frac{dt}{t^2}$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t}\right)dt = -\int_1^0 u\left(e^u - \cos u\right)\frac{1}{u^2} du = \int_0^1 \frac{e^u - \cos u}{u} du$$

$$\Rightarrow \frac{e^u - \cos u}{u} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} - 1 + \frac{u^2}{2}\right) = 1 + u \Rightarrow \text{Convergence}$$

j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^7}{t^{16}+1} dt$

- $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^7}{t^{16}+1} dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{t^7}{t^{16}+1} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^7}{t^{16}+1} dt = J + K$

  $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t^9 \times t^7}{t^{16}+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{t^{16}}} = 1 \Rightarrow K = \int_0^{+\infty} \frac{t^7}{t^{16}+1} dt$ convergente

- $u = -t \Rightarrow J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u^7}{u^{16}+1} du = -K$ $\Rightarrow$ K convergente

k) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t \ln(\ln t)}$

$$\forall t > e^2 \Rightarrow \frac{1}{t \ln t \ln(\ln t)} > 0$$

Effectuons un changement de variable :

$$u = \ln\left(\ln t\right) \Rightarrow du = \frac{1/t}{\ln t} dt \Rightarrow dt = t \ln t du$$

$$\Rightarrow \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t \ln(\ln t)} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u}$$ $\Rightarrow$ divergente

l) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{Log(1+\sqrt{x})} dx$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{Log(1+\sqrt{x})} dx = \int_0^{1} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{Log(1+\sqrt{x})} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{Log(1+\sqrt{x})} dx = J + K$$

- **Etude de J** : posons $f\left(x\right) = \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{Log(1+\sqrt{x})}$

$$\Rightarrow \left|f\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{Log\left(1+\sqrt{x}\right)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow$ J convergente car absolument convergente

- **Etude de K** :

$$\sin \frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \Rightarrow f\left(x\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2 Logx} \Rightarrow \lim_{x \to 0} x^{3/2} f\left(x\right) = 0$$ $\Rightarrow$ K convergente

m) $\int_1^{+\infty} Logxdx$

$$\int_1^{+\infty} Logxdx = \left[xLogx - x\right]_1^{+\infty} = +\infty$$ $\Rightarrow$ divergente

n) $\int_1^{+\infty} \frac{Arctg(x-1)}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} dx$

$$\frac{Arctg(x-1)}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} \underset{\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{x^{8/3}}$$ $\Rightarrow$ Convergence

o) $\int_0^1 \sin\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} t^k dt;\ k \in N$

Posons $f(t) = \sin\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} t^k \Rightarrow |f(t)| \leq e^{-\frac{1}{t}} t^k$

Or $\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{1}{t}} t^k = 0$ parce que la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction puissance vers l'infini.

Par suite $\forall k \in N; \lim_{t\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} t^k = 0$ donc l'intégrale $\int_0^1 \sin\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} t^k dt;\ k \in N$ est une intégrale définie.

p) $\int_0^{+\infty} t^\alpha \ln(1+t)dt;\ \alpha \in R$

$\underline{\alpha > 0}$

$I = \int_0^{+\infty} t^\alpha \ln(1+t)dt$ est une untégrale de $1^{\text{ère}}$ espèce

$\lim_{t\to+\infty^+} \sqrt{t} f(t) = +\infty \Rightarrow p = \frac{1}{2} < 1; L = +\infty \Rightarrow$ I est divergente

$\underline{\alpha = 0}$

$I = \int_0^{+\infty} \ln(1+t)dt = \infty \Rightarrow$ I est divergente

$\underline{\alpha < 0}$

$I = \int_0^1 t^\alpha \ln(1+t)dt + \int_1^{+\infty} t^\alpha \ln(1+t)dt = J + K$

Etude de J

$$\ln(1+t) \underset{0}{\approx} t \Rightarrow t^\alpha \ln(1+t) \underset{0}{\approx} t^{\alpha+1} = \frac{1}{t^{-\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{conv pour} & -\alpha - 1 < 1 & \Rightarrow -2 < \alpha < 0 \\ \text{div pour} & -\alpha - 1 \geq 1 & \Rightarrow -\infty < \alpha \leq -2 \end{cases}$$

Etude de K

$$\lim_{t\to+\infty^+} t^p \frac{\ln(1+t)}{t^{-\alpha}} = \lim_{t\to+\infty^+} \frac{\ln(1+t)}{t^{-\alpha-p}} = L$$

Si $1 < -\alpha$, on choisit $1 < p < -\alpha \Rightarrow 0 < -\alpha - p \Rightarrow L = 0$

$\Rightarrow$ K convergente pour $\alpha < -1 < 0$

Si $-\alpha \leq 1$, on choisit $-\alpha < p \leq 1 \Rightarrow -\alpha - p < 0 \Rightarrow L = +\infty$

$\Rightarrow$ K divergente pour $-1 \leq \alpha < 0$

Résumé pour I

I est convergente pour $-2 < \alpha < -1$ et divergente ailleurs

q) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{\beta} dx; \quad (\alpha,\beta) \in R^2$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{\beta} dx = \int_0^{1} e^{-\alpha x} x^{\beta} dx + \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{\beta} dx = J + K$$

Etude de J

Au voisinage de 0 $e^{-\alpha x} x^{\beta} \approx x^{\beta} = \dfrac{1}{x^{-\beta}}$ $\Rightarrow$ J **convergente** $\Leftrightarrow -\beta < 1 \Leftrightarrow -1 < \beta$

Etude de K

$\underline{\alpha < 0}$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/2} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^{1/2+\beta} e^{-\alpha x} = +\infty$$

$$L = +\infty \text{ et } p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{K divergente } \forall \beta$$

$\underline{\alpha = 0}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-\beta}} dx \Rightarrow \text{K convergente pour } -\beta > 1 \Rightarrow \beta < -1$$

$\underline{\alpha > 0}$

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^{3/2+\beta} e^{-\alpha x} = 0$$

$$L = 0 \text{ et } p = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \text{K convergente } \forall \beta$$

Résumé

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{\beta} dx$ converge si $-1 < \beta$ et $\alpha \geq 0$

diverge si $\beta \leq -1$ et $\alpha < 0$

2.

a) Montrer que $\int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos t dt$ k<0 est convergente.

$f(t) = t^{k-1} \cos t \Rightarrow |f(t)| \leq \dfrac{1}{t^{1-k}}$; k<0 $\Rightarrow$ -k>0 $\Rightarrow$ 1-k>1

$\int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos t dt$ convergente car absolument convergente

b) En déduire que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} t^k \sin t dt \quad k<0$ est définie.

Une intégration par partie en posant $u=\cos t$ et $dv=t^{k-1}dt$ donne :

$$\int_1^{+\infty} t^{k-1}\cos t dt = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} t^k \sin t dt$$

c) Utiliser le résultat précèdent pour étudier l'existence de l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\sin\left(t^2\right) dt$$

Posons $u=t^2 \Rightarrow du=2tdt \Rightarrow \int_1^{+\infty} \sqrt{t}\sin\left(t^2\right) dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} u^{-\frac{1}{4}}\sin u \, du$ convergente

3. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(x-e^x\right)}dx$ est convergente et calculer sa valeur.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(x-e^x\right)}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{\left(x-e^x\right)}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{\left(x-e^x\right)}dx = J+K$$

Etude de k

$$f(x)=e^{\left(x-e^x\right)} \underset{+\infty}{\ll} e^{\left(x-1-x-\frac{x^2}{2}\right)} = e^{-1-\frac{x^2}{2}}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x) = e^{-1}\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow K=\int_0^{+\infty} e^{\left(x-e^x\right)}dx$ convergente

Etude de J

Posons $t=-x \Rightarrow J=\int_{-\infty}^{0} e^{\left(x-e^x\right)}dx = -\int_{+\infty}^{0} e^{\left(-t-e^{-t}\right)}dt = \int_0^{+\infty} e^{\left(-t-e^{-t}\right)}dt$

$f(-t)=e^{\left(-t-e^{-t}\right)} \underset{+\infty}{\ll} e^{\left(-t-1+t-\frac{t^2}{2}\right)} = e^{-1-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow$ et comparant à précédement on déduit la convergence de $J=\int_{-\infty}^{0} e^{\left(x-e^x\right)}dx$

$\Rightarrow$ I est convergente.

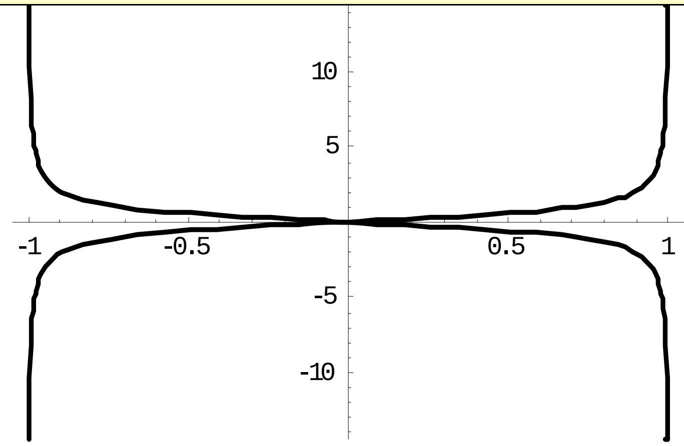
Calcul de K+J

Cela se fait en faisant le changement de variable $u=e^x$ pour K et $u=e^{-x}$ pour J

⇨ $K=\frac{1}{e}$ et $J=1-\frac{1}{e} \Rightarrow$ **J+K=1**

4. Trouver la surface comprise entre les courbes suivantes et leur asymptotes:

$$y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}; \quad y = \frac{8}{x^2+4}; \quad y = \frac{x}{(4+x^2)^2}; \quad y = xe^{\frac{x^2}{2}}$$



$$S_1 = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}dx = 4$$

$$S_2 = 2\int_0^{+\infty} \frac{8}{x^2+4}dx = 4\pi$$

$$S_3 = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{(4+x^2)^2}dx = \frac{1}{4}$$

$$S_4 = 2\int_0^{+\infty} xe^{\frac{x^2}{2}}dx = +\infty$$

5. Soient les intégrales impropres : $I = \int_0^1 \frac{Logx}{1+x^2}dx$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{Logx}{1+x^2}dx$

a) Montrer qu'elles sont convergentes et que I+J=0

$$I = \int_0^1 \frac{Logx}{1+x^2}dx$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\left|f(x)\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\left|Logx\right|}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \text{I convergente car abs. Conv.}$$

Posons $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{Logx}{1+x^2}dx = \int_{+\infty}^1 \frac{-Logt}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -J$

$\Rightarrow$ J est convergente et I+J=0

b) Déduire que $K = \int_0^{+\infty} \frac{Logx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} Loga$ *(Changement de variable)*

Posons $x = at \Rightarrow dx = adt \Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} \frac{Logx}{a^2 + x^2} dx = a \int_0^{+\infty} \frac{Loga + Logt}{a^2 + a^2 t^2} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{Loga}{1 + t^2} dt + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{Logt}{1 + t^2} dt$$

$$= \frac{Loga}{a} \left[Arctgt \right]_0^{+\infty} = \frac{Loga}{a} \frac{\pi}{2}$$

6. On considère l'intégrale Eulerienne suivante: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

a) Etudier la convergence de cette intégrale.

$\underline{\alpha \geq 1}$

$\Gamma(\alpha)$ est une intégrale de 1ère espèce

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 x^{\alpha-1}e^{-x} = 0 \Rightarrow \Gamma(\alpha) \text{ convergente}$$

$\underline{\alpha < 1}$

$\Gamma(\alpha)$ est une intégrale de 3ème espèce

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{1-\alpha}}dx+\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = I(\alpha)+J(\alpha)$$

Etude de $I(\alpha)$

$$\frac{e^{-x}}{x^{1-\alpha}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \Rightarrow I(\alpha) \text{ convergente pour } 1-\alpha<1 \Rightarrow \alpha>0$$

Etude de $J(\alpha)$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 x^{\alpha-1}e^{-x} = 0 \Rightarrow J(\alpha) \text{ convergente}$$

Résumé

$\Gamma(\alpha)$ convergente $\forall \alpha > 0$

b) Intégrer par partie et trouver une relation entre $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\alpha+1)$

$$u=e^{-x} \Rightarrow du=-e^{-x}dx; \quad dv = x^{\alpha-1}dx \Rightarrow v=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\left[\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{\alpha}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\alpha}e^{-x}dx=\frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$$

$$\Rightarrow \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

c) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de α.

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

$$\Rightarrow \Gamma(2)=\Gamma(1)=1$$

$$\Rightarrow \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2$$

$$\Rightarrow \Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\times 2\times 1$$

$\ldots$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1)=n!$$

7. Etudier la convergence de intégrale Eulerienne suivante:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p,q)\in R^2$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=J+K$$

Etude de J

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\underset{0}{\sim}\frac{1}{x^{1-p}}$$ $\Rightarrow$ J convergente pour 1- p<1 $\Rightarrow$ p>0

Etude de K

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\underset{1}{\sim}\frac{1}{(1-x)^{1-q}}$$ $\Rightarrow$ K convergente pour 1- q<1 $\Rightarrow$ q>0

$B(p,q)$ est convergente pour p et q positifs strictement.

a) Montrer que B(p, q) = B(q, p)

Posons $x=1-u \Rightarrow dx=-du$

$$\Rightarrow B(p,q)=-\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}dx=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,dx$$

$$\Rightarrow B(p,q)=B(q,p)$$

b) Démontrer que $B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1}\,dx$

Posons $x=\sin^2 u \Rightarrow dx=2\sin u\cos u du \Rightarrow$

$$B(p,q)=\int_0^{\pi/2}(\sin u)^{2p-2}(\cos u)^{2q-2}\,2\sin u\cos u du$$

$$=2\int_0^{\pi/2}(\sin u)^{2p-1}(\cos u)^{2q-1}\,du$$

c) Montrer que les intégrales $I=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$ et $J=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ où $a>0$ sont absolument convergentes.

$\lim_{x\to\infty} x^2\left|e^{-ax}\cos bx\right|=0$ de même $\lim_{x\to\infty} x^2\left|e^{-ax}\sin bx\right|=0$

$\Rightarrow$ I et J convergentes

d) Calculer I et J.

Intégration par parties :

$$u = e^{-ax} \Rightarrow du = -ae^{-ax}dx \ ; \ dv = \cos bx dx \Rightarrow v = \frac{\sin bx}{b}$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \left[e^{-ax}\frac{\sin bx}{b}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{b}ae^{-ax}dx = \frac{a}{b}J$$

De même :

$$u = e^{-ax} \Rightarrow du = -ae^{-ax}dx \ ; \ dv = \sin bx dx \Rightarrow v = -\frac{\cos bx}{b}$$

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = \left[-e^{-ax}\frac{\cos bx}{b}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{b}ae^{-ax}dx = \frac{1}{b} - \frac{a}{b}I$$

$$\Rightarrow I = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b}I\right) \Rightarrow I = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I \Rightarrow I\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{a}{b^2}$$

$$\Rightarrow I(a,b) = \frac{a}{a^2+b^2}$$

On démontre de même que

$$\Rightarrow J(a,b) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

e) En déduire la valeur de: $K = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^3 x dx$

Nous savons que $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$$\Rightarrow \quad K = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^3 x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)dx$$

$$= \frac{3}{4}J(1,1) - \frac{1}{4}J(1,3) = \frac{3}{8} - \frac{3}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

8. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Puisque x est comprise entre 0 et 1 on pose poser :

$$x = \cos^2 t \Rightarrow dx = -2\sin t\cos t dt \ \Rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}dx = -\int_{\pi/2}^0 \frac{\sin t}{\cos t}2\sin t\cos t dt = 2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

9. Montrer que l'intégrale $I(p)=\int_0^{+\infty}\frac{Log(1+x)}{x^{p+1}}dx$ a un sens si 0<p<1.

$$I(p)=\int_0^1\frac{Log(1+x)}{x^{p+1}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{Log(1+x)}{x^{p+1}}dx=J(p)+K(p)$$

Etude de $J(p)$ **:** $\frac{Log(1+x)}{x^{p+1}}\underset{0}{\sim}\frac{1}{x^p}$ $\Rightarrow$ convergence pour p<1

Etude de $K(p)$: $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}\frac{Log(1+x)}{x^{p+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha-p-1}Log(1+x)=0$

$$\text{si }\left\{\begin{matrix}\alpha-p-1<0\\ \alpha>1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1<\alpha<p+1\Rightarrow 0<p$$

Résumé : Convergence pour 0<p<1

- Montrer que $I\left(\frac{1}{2}\right)=2\pi$

$$I\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{Log(1+x)}{x^{3/2}}dx$$

$$u=Log(1+x)\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x}\ ;\ dv=\frac{dx}{x^{3/2}}\Rightarrow v=-\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$I\left(1/2\right)=\left[-\frac{2Log(1+x)}{\sqrt{x}}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2Log(1+x)}{\sqrt{x}}\right)+\lim_{x\to 0}\left(2\underbrace{\sqrt{x}}_{0}\underbrace{\frac{Log(1+x)}{x}}_{1}\right)+2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Posons $x=tg^2t\Rightarrow dx=2tgt\left(1+tg^2t\right)dt$

$$I\left(1/2\right)=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_0^{\pi/2}\frac{2tgt\left(1+tg^2t\right)}{tgt\left(1+tg^2t\right)}dt=4\frac{\pi}{2}=2\pi$$