TD1 Les vecteurs

Part 1

1. Trouver A+B, A-B, 3A, -2B dans chacun des cas suivants:

- A=(2,-1), B=(-1,1) $\Rightarrow$ A+B = (1, 0)
- A=(-1,3), B=(0,4) $\Rightarrow$ A+B = (-1, 7)
- A= (2,-1,5), B=(-1,1,1) $\Rightarrow$ A+B = (1, 0, 6)
- A=(π,3,-1),B=(2π,-3,7) $\Rightarrow$ A+B = (3π, 0, 6)

---

1. Déterminer les vecteurs liés PQ et AB équivalents et parallèles

- P = (1, -1), Q = (4, 3), A = (-1, 5), B = (5, 2)
  i) PQ = (3, 4) ; AB = (6, -3) = 3 (2, -1) $\Rightarrow$ **Rien**
- P = (1, 4) , Q = (-3, 5) ; A = (5, 7), B = (9, 6)
  i) PQ = (- 4, 1) ; AB = (4, -1) $\Rightarrow$ AB = - PQ $\Rightarrow$ ce sont **2 vecteurs parallèles**
- P = (1, -1, 5), Q = (-2, 3, -4), A = (3, 1, 1), B = (0, 5, 1)
  i) PQ = (-3, 4, -9) ; AB = (-3, 4, 0) $\Rightarrow$ **Rien**
- P = (1, 2, 4), Q = (-1, 3, 5), A = (2, 3, 4), B = (0, 4, 5)
  i) PQ = (-2, 1, 1) ; AB = (-2, 1, 1) $\Rightarrow$ ce sont **2 vecteurs équivalents**

---

2. Calculer $A \cdot B$, $A \cdot A$, $(A+B)^2$, $(A-B)^2$ lorsque :

- A = (2, -1, 3), B = (-1, 1, 1)
- Dites s'ils sont perpendiculaires?
  i) $A \cdot B = -2 - 1 + 3 = 0$ $\Rightarrow$ **ils sont perpendiculaires**
  ii) $A.A = 4 + 1 + 9 = 14$;
  iii) $A + B = (1, 0, 4) \Rightarrow (A+B)^2 = 1 + 0 + 16 = 14$
  iv) $A - B = (3, -2, 2) \Rightarrow (A-B)^2 = 9 + 4 + 4 = 17$

3. Montrer que si le vecteur A est perpendiculaire à tout autre vecteur X, alors A=0

- $A.X = 0; \forall \Rightarrow (a_1, ..., a_i, ..., a_n).(0, ..., 1, ..., 0) = a_i = 0$ et ceci pout tout i.

4. Trouver dans chacun des cas suivants la norme de A, la projection de A sur B, le cosinus de leur angle:

- A=(1,-2), B=(5,3)

  i) $\|A\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$;

  ii) $proj_B(A) = kB = \frac{A.B}{B.B} B = \frac{5-6}{25+9}(5,3) = \frac{-1}{34}(5,3)$

  iii) $\cos\theta = \frac{A.B}{\|A\|\|B\|} = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = \frac{-1}{\sqrt{170}} \Rightarrow \theta = 1.00295^\circ$

- A= (-2,1,4), B=(-1,-1,3)

  i) $\|A\| = \sqrt{21}$; $proj_B(A) = \frac{13}{11}(-1,-1,3)$; $\cos\theta = \frac{13}{\sqrt{231}}$; $\theta = 1.52447^\circ$

- A=(-1,1,0), B=(2,1,-1)

  i) $\|A\| = \sqrt{2}$; $proj_B(A) = \frac{1}{3}\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\cos\theta = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$; $\theta = 1.04316^\circ$

- A=(1, -2, 3), B=(-3, 1, 5).

  i) $\|A\| = \sqrt{14}$; $proj_B(A) = \frac{1}{7}(-6, 2, 10)$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{7}$; $\theta = 1.1115^\circ$

5. Déterminer les angles du triangle: (2,-1,1), (1,-3,-5), (3,-4,-4)

- $\cos(A,B) = \frac{A.B}{\|A\|\|B\|} = 0 \Rightarrow (A,B) = 90$

- $\cos(A,C) = \frac{A.C}{\|A\|\|C\|} = \sqrt{\frac{6}{41}} \Rightarrow (A,B) \approx 67.5085$

- $\cos(B,C) = \frac{B.C}{\|B\|\|C\|} = \sqrt{\frac{35}{41}} \Rightarrow (A,B) \approx 22.4915$

- On vérifie que la somme des angles est bien égale à 180 degrés

6. Prouver que:

- $\|A+B\|^2+\|A-B\|^2=2\|A\|^2+2\|B\|^2$

  i) $\|A+B\|^2=(A+B)(A+B)=A^2+B^2+2A.B$

  ii) $\|A-B\|^2=(A-B)(A-B)=A^2+B^2-2A.B$

  iii) $\|A+B\|^2+\|A-B\|^2=2A^2+2B^2=2\|A\|^2+2\|B\|^2$

  iv) $\|A+B\|^2-\|A-B\|^2=4AB$

7. Montrer par un contre exemple que si A.B = A.C, B n'est pas nécessairement égal à C.

- $A=(-1,-2,3)$, $B=(2,4,-1)$, $C=(1,0,-4)$
- $A.B=-2-8-3=-13$ $A.C=-1-12=-13$

8. Ecrire une représentation paramétrique des lignes passant par les points suivants:

- P=(1,3,-1), Q=(-4,1,2) $\Rightarrow M=(1-5t,3-2t,-1+3t)$
- P=(-1,5,3), Q=(-2,4,7) $\Rightarrow M=(-1-t,5-t,3+4t)$
- P=(1,1,-1), Q=(-2,1,3) $\Rightarrow M=(1-3t,1,-1+4t)$
- P=(-1,5,2), Q=(3,-4,1) $\Rightarrow M=(-1+4t,5-9t,2-t)$

9. Trouver l'équation du plan passant par le point P et perpendiculaire au vecteur N lorsque:

- N=(1,-1,3) et P=(4,2,-1) $\Rightarrow x-y+3z=-1$
- N=(-3,-2,4) et P=(2,π,-5) $\Rightarrow -3x-2y+4z+26+2\pi=0$
- N=(-1,0,5) et P=(2,3,7) $\Rightarrow -x+5z-33=0$
- N=(1,1,1) et P=(1,1,1) $\Rightarrow x+y+z-3=0$

10. Trouver l'équation de la droite passant par (-5,3) et perpendiculaire au vecteur (1,-1)

- $u = (1,1)$; $M = (-5+t, 3+t)$

11. Trouver la distance entre le point (1,1,2) et le plan 3x + y - 5z = 2, écrire la formule générale donnant cette distance.

Corrigé

- La normale au plan est : $N = (3,1,-5)$

- L'équation de la normale au plan passant par P est donnée par :
  $M = (1,1,2) + tN = (1+3t, 1+t, 2-5t)$

- Le point I d'intersection de cette normale avec le plan vérifie l'équation du plan et celui de la normale :

  i) $3(1+3t) + 1 + t - 5(2-5t) = 2 \Rightarrow t = \frac{8}{35}$

  ii) $I = \left(\frac{59}{35}, \frac{43}{35}, \frac{6}{7}\right)$

- La distance demandée est $\|I - P\| = \frac{8}{\sqrt{35}}$

Part 2

12. Trouver le vecteur vitesse des courbes suivantes:

- Voir si le vecteur accélération est perpendiculaire au vecteur vitesse.

- $(\cos t, \sin t)$

  i) $v(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow a(t) = (-\cos t, -\sin t)$

  ii) $v(y).a(t) = 0$

- $(e^t, \cos t, \sin t)$

  i) $v(t) = (e^t, -\sin t, \cos t) \Rightarrow a(t) = (e^t, -\cos t, -\sin t)$

  ii) $v(y).a(t) \neq 0$

- $(\sin 2t, Log(1+t), t)$

i) $v(t)=\left(2\cos 2t,\frac{1}{1+t},1\right) \Rightarrow a(t)=\left(-4\sin 2t,-\frac{1}{(1+t)^2},0\right)$

ii) $v(y).a(t)\neq 0$

13. Trouver le vecteur vitesse des courbes suivantes:

- $(\cos t, \sin t)$; $(e^t, \cos t, \sin t)$; $(\sin 2t, \mathrm{Log}(1+t), t)$
- Voir si le vecteur accélération est perpendiculaire au vecteur vitesse.

14. Soit X(t) une courbe différentiable. Le plan où la droite perpendiculaire au vecteur vitesse X'(t) au point X(t), est dit normal à la courbe au point t ou au point X(t). Trouver l'équation de la normale à la courbe (cos3t, sin3t) au point $\pi/3$, et l'équation du plan normal à la courbe (e^t, t, t^2) aux points t=1 et t=0.

15. Soit X(t) une courbe différentiable définie dans un intervalle ouvert. Considérons un point Q non situé sur la courbe.

- Ecrire la formule donnant la distance entre Q et un point quelconque de la courbe.
- Si t_0 est la valeur de t pour laquelle la distance entre Q et $X(t_0)$ est minimum, montrer que le vecteur $Q-X(t_0)$ est normal à la courbe, au point $X(t_0)$.
- Si X(t) est l'équation d'une droite, montrer qu'un tel t_0 est unique.

16. Montrer que si la vitesse est constante, alors le vecteur accélération est perpendiculaire au vecteur vitesse.

17. Montrer que si le vecteur accélération d'une courbe est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse, alors la vitesse est constante.

18. Soit un vecteur non nul B et une courbe X(t) telle que X(t).B = t pour tout t. Supposons que l'angle de X'(t) et de B est constant. Montrer que X"(t) est toujours perpendiculaire à X'(t).

19. Ecrire une équation paramétrique de la tangente aux courbes suivantes, aux points suivants:

- $(\cos 4t, \sin 4t, t)$ $au\ \ point\ \ t = {}^{p}\!/_{8}$)
- $(t, 2t, t')$ $au\ \ point\ \ A=(1,2,1)$

- $(e^{3t}, e^{-3t}, \sqrt{2t})$ au point $t = 1$
- (t, t^3, t^4) au point $t = (1,1,1)$

20. Soit X(t) = $\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right)$. Montrer que l'angle de X(t) et de X'(t) est constant.

21. Calculer la longueur des arcs suivants:

- (cos2t, sin2t, 3t) entre t=1 et t=3.
- (t-sint, 1-cost) entre t=0 et t=2π. Et entre t=0 et t=π/2.
- (t, Logt) entre t=1 et t=2.

22. Démontrer que les deux courbes : $(e^t, e^{2t}, 1-e^{-t})$ et (1-t, cost, sint) se coupent au point (1,1,0). Quel est l'angle de leurs tangentes au point (1,1,0).

23. Quels sont les points d'intersection de la courbe $(2t^2, 1-t, 3+t^2)$ et le plan $8x - 14y + z - 10 = 0$

24. Soit X(t) = (acost, asint, bt) tel que a et b soient constantes. Soit u(t) l'angle de la tangente en un point donné de la courbe avec l'axe des z. Démontrer que cos u(t) est constant et a pour valeur: $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

25. Soit B un vecteur unitaire fixe, et soit X(t) une courbe telle que $\forall t;\ X(t)*B = e^{2t}$. Supposons aussi que le vecteur vitesse de la courbe détermine un angle u constant avec le vecteur B, et $0 < u < \pi/2$.

- Démontrer que la vitesse v(t) a pour valeur $\frac{2e^{2t}}{\cos u}$
- Calculer le produit scalaire X'(t).X''(t) en fonction de t et u.