# TD2 Fonctions de plusieurs variables

---

1. Les fonctions suivantes ont-elles une limite lorsque (x, y) tends vers (0,0)?

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad f(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2},\quad f(x,y)=\frac{x^3y^3}{x^2+y^2},\quad f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^3}{x^2+y^4}$$

**Corrigé 1**

- $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

On remarque que le degré du numérateur est **égal à** celui du dénominateur. En principe je ne dois pas avoir de limite. Je pose alors :

$$y = mx$$

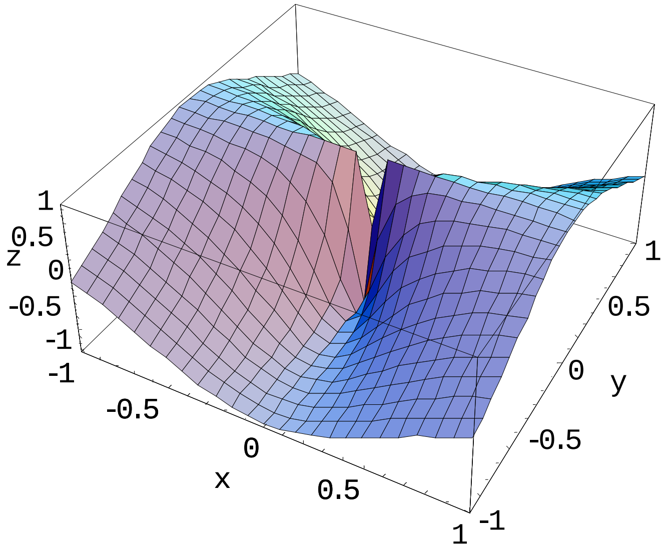
$$f(x,mx)=\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

**Cette limite n'existe pas** puisquelle dépend de m.

Si m=1, elle est égale à 0. Si m=0 elle est égale à 1

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$




- $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$


Ici le degré du numérateur est **plus petit** que celui du dénominateur. En principe je ne dois pas avoir de limite. Je passe en coordonnées polaire. $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r\left(|\cos\theta| + \sin\theta\right)}{r^2} = +\infty$$

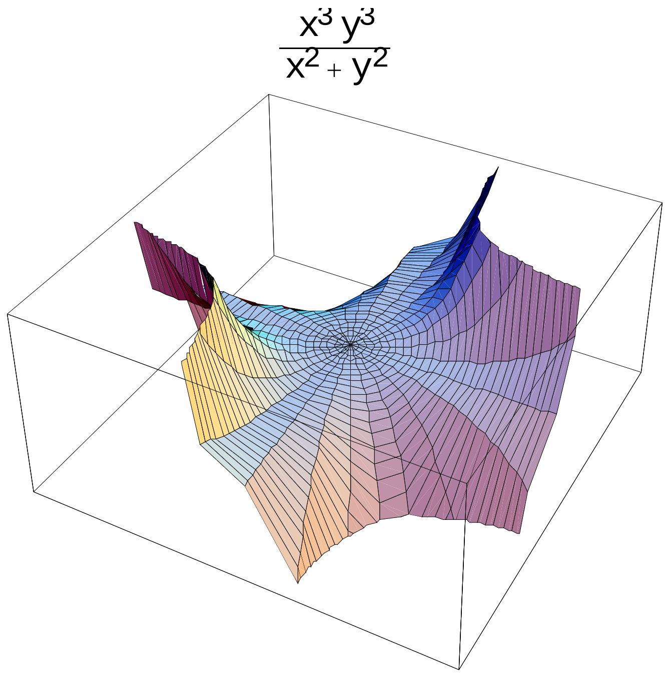
**Cette limite n'existe pas**

- $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

Ici le degré du numérateur est **plus grand** que celui du dénominateur. En **principe** je dois pas avoir de limite. Je passe en coordonnées polaire. $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^6(\cos\theta)^3(\sin\theta)^3}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^4(\cos\theta)^3(\sin\theta)^3 = 0; \forall\theta$$

**Cette limite existe.**

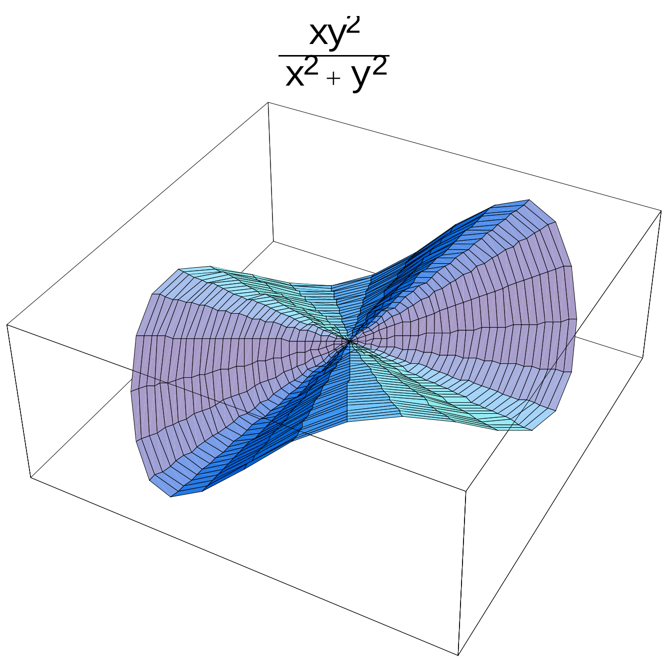



- $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

Ici le degré du numérateur est **plus grand** que celui du dénominateur. En principe je dois pas avoir de limite. Je passe en coordonnées polaire. $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos\theta)(\sin\theta)^2}{r^2} = 0; \forall\theta$$

**Cette limite existe** et est égale à 0**.**



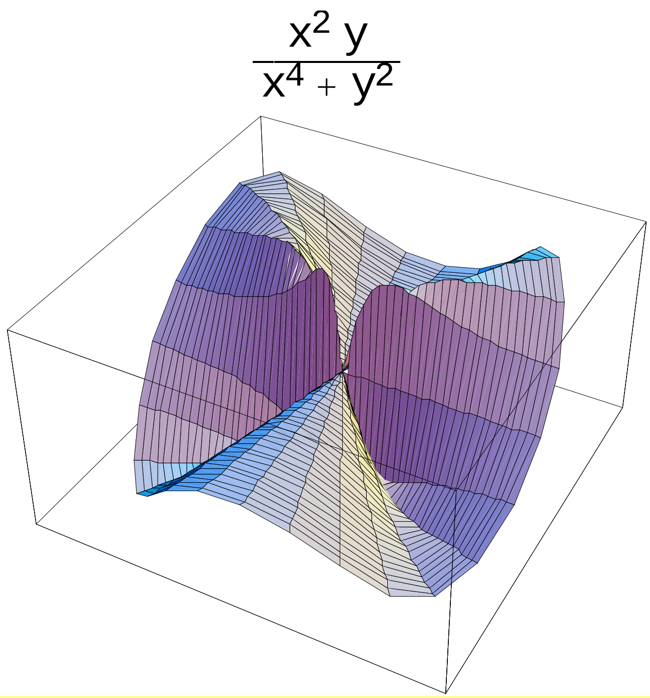
- $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^4}$

N'a pas de limite

2. Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Etudier la limite de f(x,y) au point (0, 0) quand (*x*,*y*) parcourt d'abord :

a) Une droite passant par l'origine $y = tx$, ($t$ fixé)
b) La parabole $y = x^2$
c) Que peut-on conclure?

## Corrigé 2




- Une droite passant par l'origine $y = tx$

$$\lim_{x \to 0} f(x,tx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 t}{x^4 + t^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{xt}{x^2 + t^2} = 0$$

- La parabole $y = x^2$

$$\lim_{x \to 0} f(x,x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

- Que peut-on conclure?

La limite n'existe pas puisqu'elle dépend du chemin suivi pour tendre vers (0, 0)

3. Etudier la continuité au point (0,0) des fonctions suivantes:

a) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ et f(0,0) = 0

b) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ et f(0,0)=0

## Corrigé 3

- $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos\theta + \sin\theta)^2}{r^2} = (\cos\theta+\sin\theta)^2$$

La fonction **n'est pas continue** au point $(0,0)$ puisque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$

- $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0}\left(r^2 \sin\left(\frac{1}{r^2}\right)\right) = 0 \times \textit{bornée} = 0$$

La fonction **est continue** au point $(0,0)$ puisque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

4. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. Calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)]$; b) $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)]$; c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

## Corrigé 4

- $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)]$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}[0] = 0$$

- $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)]$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}[1] = 1$$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Cette limite n'existe pas puisque la limite suivant deux chemins différents n'est pas la même. En effet :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

Cette limite n'existe pas puisqu'elle dépend du chemin suivi pour atteindre le point (0,0)

5. Calculer les dérivées partielles, premières et secondes, des fonctions :

$xy+z,\quad x^2y^5+5,\quad \sin xy+\cos yz,\quad e^{xyz},\quad x^y,\quad Log(x+y)$

## Corrigé 5

- $f(x,y) = xy+z \Rightarrow f_x^{'}(x,y) = y;\ f_y^{'}(x,y) = x;\ f_z^{'}(x,y) = 1$
- $f(x,y) = \sin xy + \cos yz \Rightarrow f_x^{'}(x,y) = y\cos xy;\ f_y^{'}(x,y) = x\cos xy - z\sin yz;$
  $f_z^{'}(x,y) = -y\sin yz$
- etc..

6. Soit la fonction f définie par:

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad si \quad (x,y)\neq(0,0) \quad et \quad f(0,0)=0$$

a) Calculer $f_{xy}^{''}(0,0)$ $et$ $f_{yx}^{''}(0,0)$.

b) Que peut-on déduire?

c) $f$ est-elle différentiable au point (0,0)?

## Corrigé 6

- Calculer $f_{xy}^{''}(0,0)$ $et$ $f_{yx}^{''}(0,0)$.

$f''_{xy}(0,0) = \left(f'_x\right)'_y(0,0)$

$f'_x(0,0)$

7. Soit $f(x,y) = g(x) + h(y)$. Supposons que la fonction g est différentiable en $x_0$ et h différentiable en $y_0$. Montrer d'après la définition que la fonction f est différentiable en $(x_0, y_0)$

## Corrigé 7

g différentiable en $x_0 \Rightarrow g(x_0 + l) - g(x_0) = l\,g'(x_0) + l\alpha(l)$

h différentiable en $y_0 \Rightarrow h(y_0 + k) - h(y_0) = kh'(y_0) + k\beta(k)$

$$\begin{aligned} f(x_0 + l, y_0 + k) &= g(x_0 + l) + h(y_0 + k) \\ &= g(x_0) + l\,g'(x_0) + l\alpha(l) + h(y_0) + kh'(y_0) + k\beta(k) \end{aligned}$$

$$f(x_0 + l, y_0 + k) = g(x_0) + h(y_0) + l\,g'(x_0) + kh'(y_0) + l\alpha(l) + k\beta(k)$$

$$f(x_0 + l, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = l\,g'(x_0) + kh'(y_0) + l\alpha(l) + k\beta(k)$$

En posant $\sqrt{l^2 + k^2}\,\gamma(l,k) = l\alpha(l) + k\beta(k)$ on aurait démontrer la différentiabilité de *f* au point $(x_0, y_0)$.