TD4 Fonctions Potentielles

1. Trouver les fonctions potentielles des champs vectoriels suivants:

$$(a)\ (4xy,\ 2x^2);\quad (b)\ (xy\cos xy+\sin xy, x^2\ \cos xy)$$
$$(c)\ (2x, 4y^3);\quad (d)\ (ye^{xy}, xe^{xy})$$

Corrigé 1

a) Posons : $(\mathrm{P,Q})=(4xy,\ 2x^2)$

$\Rightarrow$ (P, Q) est défini dans R²qui est connexe.

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=4x\,;\ \frac{\partial P}{\partial y}=4x\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ (P, Q) est fermée donc **exacte**

$$\Rightarrow \left(f_x^{'}, f_y^{'}\right)=(4xy,\ 2x^2)\Rightarrow\ f_x^{'}=4xy,\ f_y^{'}=2x^2$$

$$\Rightarrow \int f_x^{'}dx=\int 4xydx \Rightarrow f\left(x,y\right)=2x^2y+\alpha\left(y\right)$$

$$\Rightarrow\ f_y^{'}\left(x,y\right)=2x^2+\alpha'\left(y\right)=2x^2\Rightarrow \alpha'\left(y\right)=0\Rightarrow \alpha=C^{te}$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(x,y\right)=2x^2y+\alpha}$$

. . . .

b) Posons $=\left(P,Q\right)=(xy\cos xy+\sin xy, x^2\cos xy)$

$\Rightarrow$ (P, Q) est défini dans R² qui est connexe.

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos xy-yx^2\sin xy\,;\ \frac{\partial P}{\partial y}=x\cos xy-x^2y\sin xy+x\cos xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ (P, Q) est fermée donc **exacte**

$$\Rightarrow \left(f_x^{'}, f_y^{'}\right)=(xy\cos xy+\sin xy, x^2\cos xy)$$

$$\Rightarrow\ f_x^{'}=xy\cos xy+\sin xy,\quad f_y^{'}=x^2\cos xy$$

$$\Rightarrow \int f_y^{'}dy=\int x^2\cos xydy\Rightarrow f\left(x,y\right)=x\sin xy+\alpha\left(x\right)$$

$$\Rightarrow\ f_x^{'}\left(x,y\right)=\sin xy+xy\cos xy+\alpha'\left(x\right)=2x^2\Rightarrow \alpha'\left(x\right)=0\Rightarrow \alpha=C^{te}$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(x,y\right)=x\sin xy+\alpha}$$

c) Posons $(P,Q)=(2x,4y^3)$

$\Rightarrow$ (P, Q) est défini dans R² qui est connexe.

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=0\,;\ \frac{\partial P}{\partial y}=0\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ (P, Q) est fermée donc **exacte**

$$\Rightarrow \left(f_x^{'},f_y^{'}\right)=(2x,4y^3)\Rightarrow\ f_x^{'}=2x,\ f_y^{'}=4y^3$$

$$\Rightarrow \int f_x^{'}dx=\int 2xdx\Rightarrow\ f\left(x,y\right)=x^2+\alpha\left(y\right)$$

$$\Rightarrow\ f_y^{'}\left(x,y\right)=0+\alpha'\left(y\right)=4y^3\Rightarrow\alpha\left(y\right)=y^4+C^{te}$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(x,y\right)=x^2+y^4+C^{te}}$$

d) Posons $(P,Q)=(ye^{xy},xe^{xy})$

$\Rightarrow$ (P, Q) est défini dans R² qui est connexe.

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}\,;\ \frac{\partial P}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ (P, Q) est fermée donc **exacte**

$$\Rightarrow \left(f_x^{'},f_y^{'}\right)==(ye^{xy},xe^{xy})\Rightarrow\ f_x^{'}=ye^{xy},\ f_y^{'}=xe^{xy}$$

$$\Rightarrow \int f_x^{'}dx=\int ye^{xy}dx\Rightarrow\ f\left(x,y\right)=e^{xy}+\alpha\left(y\right)$$

$$\Rightarrow\ f_y^{'}\left(x,y\right)=xe^{xy}+\alpha'\left(y\right)=0\Rightarrow\alpha\left(y\right)=C^{te}$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(x,y\right)=e^{xy}+C^{te}}$$

2. Trouver la fonction potentielle φ (x, y) associée au champ vectoriel:

$F(X)=(3x^2y+2y^2,x^3+4xy-1)$ et vérifiant $\phi(1,1)=4$

Corrigé 2

Posons : $(P,Q)=(3x^2y+2y^2,x^3+4xy-1)$

$\Rightarrow$ (P, Q) est défini dans R² qui est connexe.

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 4y \,;\ \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 4y \ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ (P, Q) est fermée donc **exacte**

$$\Rightarrow \left(\phi'_x, \phi'_y\right) = (3x^2 y + 2y^2, x^3 + 4xy - 1)$$

$$\Rightarrow \phi'_x = 3x^2 y + 2y^2, \quad \phi'_y = x^3 + 4xy - 1$$

$$\Rightarrow \int \phi'_x dx = \phi(x, y) = x^3 y + 2y^2 x + \alpha(y)$$

$$\Rightarrow \phi'_y(x, y) = x^3 + 4yx + \alpha'(y) = x^3 + 4xy - 1$$

$$\Rightarrow \alpha'(y) = -1 \Rightarrow \alpha(y) = -y + c$$

$$\Rightarrow \phi(x, y) = x^3 y + 2y^2 x - y + c$$

$$\Rightarrow \phi(1,1) = 1 + 2 - 1 + c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x, y) = x^3 y + 2y^2 x - y + 2}$$

---

3. Quel est le gradient de $f(x, y) = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ définie sur un rectangle ne contenant pas la droite x=0

Corrigé 3

La fonction est définie et continue dans ce rectangle qui est connexe.

$$grad\left[f(x, y)\right] = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \left(\theta'_x, \theta'_y\right)$$

---

4. Trouver une fonction potentielle φ associée au champ de vecteurs suivant:

$e^{y+2z}(1, x, 2x)$ avec $\varphi(1,1,1)=4$.

Corrigé 4

Posons $(P, Q, R) = e^{y+2z}(1, x, 2x)$

$\Rightarrow$ (P, Q, R) est défini dans R^3 qui est connexe.

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{y+2z} \,;\ \frac{\partial P}{\partial y} = e^{y+2x} \qquad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = 2xe^{y+2z} \; ; \; \frac{\partial R}{\partial y} = 2xe^{y+2z} \qquad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = 2e^{y+2z} \; ; \; \frac{\partial P}{\partial z} = 2e^{y+2z} \qquad \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$\Rightarrow$ (P, Q, R) est fermée donc **exacte**

$$\Rightarrow \left(\phi_x', \phi_y', \phi_z'\right) = e^{y+2z}(1, x, 2x) \Rightarrow \phi_x' = e^{y+2z}, \quad \phi_y' = xe^{y+2z}, \quad \phi_z' = 2xe^{y+2z}$$

$$\Rightarrow \int \phi_x' dx = \phi(x,y,z) = xe^{y+2z} + \alpha(y,z)$$

$$\Rightarrow \phi_y'(x,y,z) = xe^{y+2z} + \alpha_y'(y,z) = xe^{y+2z}$$

$$\Rightarrow \alpha_y'(y,z) = 0 \Rightarrow \alpha(y,z) = \alpha(z)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = xe^{y+2z} + \alpha(z)$$

$$\Rightarrow \phi_z'(x,y,z) = 2xe^{y+2z} + \alpha'(z) = 2xe^{y+2z} \Rightarrow \alpha'(z) = 0 \Rightarrow \alpha(z) = \alpha = C^{te}$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = xe^{y+2z} + \alpha \Rightarrow \phi(1,1,1) = e^3 + \alpha$$

$$\Rightarrow \phi(1,1,1) = 4 \Rightarrow e^3 + \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 4 - e^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y,z) = xe^{y+2z} + 4 - e^3}$$

5. On considère la forme différentielle:

$$\omega = \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{y\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

définie sur un ouvert de R^2 ne contenant pas le point (0,0)

Corrigé 5

a) Montrer en passant en coordonnées polaires que ω est la différentielle totale d' une fonction $U(r,\theta)$

Posons $\omega(x,y) = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{y\sqrt{x^2+y^2}} dy$

$$\Rightarrow x = r\cos\theta \Rightarrow dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow y = r\sin\theta \Rightarrow dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \omega\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right) = \frac{\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta}{r} + \frac{r - r\cos\theta}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta\right)$$

$$\Rightarrow U(r,\theta)=\frac{\cos\theta dr}{r}-\sin\theta d\theta+\frac{1-\cos\theta}{r}dr+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow U(r,\theta)=\left(\frac{\cos\theta}{r}+\frac{1-\cos\theta}{r}\right)dr+\left(-\sin\theta+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta\right)d\theta$$

$$\Rightarrow U(r,\theta)=\frac{dr}{r}+\left(\frac{-\sin^2\theta+\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow U(r,\theta)=\frac{dr}{r}+\left(\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)d\theta \Rightarrow \text{Posons } t=Tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin(\theta)=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos(\theta)=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ Tan(\theta)=\frac{2t}{1-t^2};\quad d\theta=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow U(r,\theta)=\frac{dr}{r}+\left(\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow U(r,\theta)=ln(r)+\int\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow \int\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}d\theta=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}-1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{-2t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{-2t}{1+t^2}dt=-\ln(1+t^2)$$

$$\Rightarrow \int\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}d\theta=\ln\left(\frac{1}{1+Tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)=\ln\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=2\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r,\theta)=ln(r)+2\ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+C^{te}=\ln\left(r\cos^2\left(\theta/2\right)\right)+C^{te}}$$

b) Donner l' équation des courbes U = Constante

$$U(r,\theta)=c^{te}\Rightarrow \ln\left(r\cos^2\left(\theta/2\right)\right)=c\Rightarrow r\cos^2\left(\theta/2\right)=e^c$$

$$\Rightarrow r\left(\frac{\cos\theta-1}{2}\right)=e^c\Rightarrow r\cos\theta-r=2e^c\Rightarrow x-\sqrt{x^2+y^2}=2e^c$$

$$\Rightarrow x-a=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+a^2-2ax=x^2+y^2$$

Ce sont donc les courbes :

$$\Rightarrow \boxed{y=+\sqrt{a^2-2ax}}\ \text{et}\ \boxed{y=-\sqrt{a^2-2ax}}$$

6. f, g étant deux fonctions numériques de classe C^1 de R dans R. Déterminer f et g pour que la forme différentielle :

$$U(x, y, z) = 2xzdx + f(y)g(z)dy + (x^2 + y^2)dz$$

soit exacte, puis déterminer une fonction F(x, y, z) telle que U = dF.

Corrigé 6

Posons $w(x, y, z) = (P, Q, R) = \left(2xz, f(y)g(z), \left(x^2 + y^2\right)\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = 2x\ ;\ \frac{\partial P}{\partial z} = 2x \qquad \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = f(y)g'(z)\ ;\ \frac{\partial R}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \Rightarrow f(y)g'(z) = 2y$$

Posons $f(y) = 2y \Rightarrow g(z) = z$

$$\Rightarrow w(x, y, z) = \left(2xz, 2yz, \left(x^2 + y^2\right)\right)$$

On vérifiera que

$$\Rightarrow U(x, y, z) = \left(x^2 + y^2\right)z + C^{te}$$

est une fonction potentielle de w.

---

7. On pose

$$P = e^{-x}\left[\frac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right]; \qquad Q = \frac{e^{-x}}{x+y}$$

Montrer que le champ de vecteurs de composantes P et Q, est le gradient d'une fonction $\varphi(x, y)$ que l'on précisera.

Corrigé 7

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-e^{-x}(x+y) - e^{-x}}{(x+y)^2} = e^{-x}\left[\frac{1+x+y}{(x+y)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-x}\left[-\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{x+y}\right] = -e^{-x}\left[\frac{1+x+y}{(x+y)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ le champ de vecteurs de composantes P et Q dérive d' un potentiel scalaire dans tout connexe ne coupant pas la droite y = -x

$$\Rightarrow (P,Q) = \left(e^{-x}\left[\frac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right], \frac{e^{-x}}{x+y} \right) = \left(\varphi_x^{'}, \varphi_y^{'}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_y^{'} = \frac{e^{-x}}{x+y} \Rightarrow \varphi(x,y) = e^{-x}\ln(x+y) + \alpha(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_x^{'}(x,y) = e^{-x}\left[\frac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right] + \alpha'(x) \Rightarrow \alpha(x) = C^{te}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x,y) = e^{-x}\ln(x+y) + C^{te}}$$

---

8. Les formes différentielles $\omega(x,y)$ suivantes ne sont pas fermées. Chercher un facteur intégrant $\tau(x,y)$ tel que la forme $\tau(x,y)\times\omega(x,y)$ soit fermée. Calculer alors les primitives de ce produit :

Corrigé 8

a) $w(x,y) = (\cos(x+y) + \sin(x+y))dx + \cos(x+y)dy$ $\tau(x,y)$ ne dépendant que de *x.*

Cas où $\tau(x,y) = \tau(x)$

Posons $(P,Q) = \left(\tau(x)(\cos(x+y) + \sin(x+y)), \tau(x)\cos(x+y)\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \tau'(x)\cos(x+y) - \tau(x)\sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \tau(x)\left(-\sin(x+y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \tau'(x)\cos(x+y) - \tau(x)\sin(x+y) = \tau(x)\left(-\sin(x+y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\Rightarrow \tau'(x)\cos(x+y) = \tau(x)\cos(x+y) \Rightarrow \tau'(x) = \tau(x)$$

$$\Rightarrow \tau(x) = e^{x}$$

$$\Rightarrow (P,Q) = \left(e^{x}(\cos(x+y) + \sin(x+y)), e^{x}\cos(x+y)\right)$$

On vérifiera que

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(x,y) = e^{x}\sin(x+y) + C^{te}}$$

est une fonction potentielle de w.

b) $w(x,y) = y(1-xy)dx + (y-x)dy$ $\tau(x,y)$ ne dépendant que de y.

Cas où $\tau(x,y) = \tau(y)$

Posons $(P,Q) = \left(\tau(y)\,y(1-xy), \tau(y)(y-x)\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\tau(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \tau(y) - 2xy\tau(y) + \tau'(y)\left(y(1-xy)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau(y) - 2xy\tau(y) + \tau'(y)\left(y(1-xy)\right) = -\tau(y)$$

$$\Rightarrow \tau(y)2(1-xy) = -\tau'(y)\left(y(1-xy)\right) \Rightarrow \frac{\tau'(y)}{\tau(y)} = -\frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\tau(y)\right) = -2\ln(y) = \ln\left(\frac{1}{y^2}\right) \Rightarrow \tau(y) = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow (P,Q) = \left(\frac{(1-xy)}{y}, \frac{(y-x)}{y^2}\right) = \left(f_x', f_y'\right)$$

$$\Rightarrow f_x' = \frac{1}{y} - x \Rightarrow f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} + \alpha(y)$$

$$\Rightarrow f_y' = -\frac{x}{y^2} + \alpha'(y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \Rightarrow \alpha'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow \alpha(y) = \ln(y) + C^{te}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} + \ln(y) + C^{te}}$$