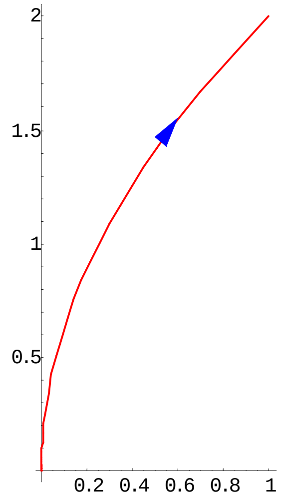
TD5 Intégrale curviligne.

1. Calculer les intégrales curvilignes des fonctions suivantes sur les chemins indiqués:

Corrigé 1



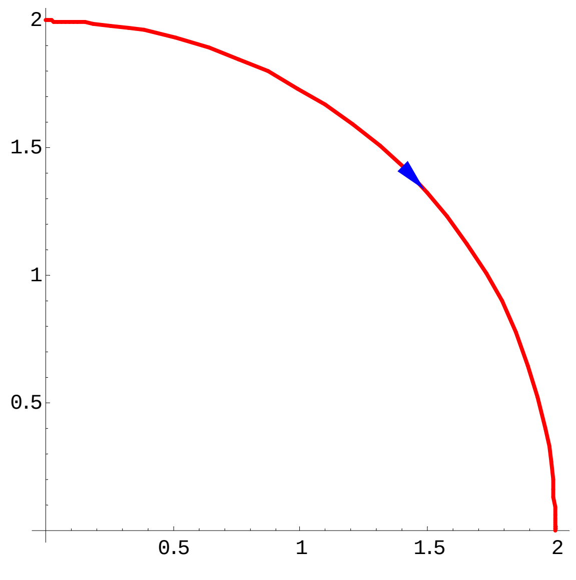
a) $F(x,y)=\left(y^2,-x\right)$ le long de $x=\dfrac{y^2}{4}$ de (0,0) à (1,2)

$$\Rightarrow C(t)=\left(\frac{t^2}{4},t\right);0\le t\le 2 \Rightarrow C'(t)=\left(\frac{t}{2},1\right)$$

$$\Rightarrow F\left(C(t)\right)\cdot C'(t)=\left(t^2,-\frac{t^2}{4}\right).\left(\frac{t}{2},1\right)=\frac{t^3}{2}-\frac{t^2}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^2\left(\frac{t^3}{2}-\frac{t^2}{4}\right)dt=\left[\frac{t^4}{8}-\frac{t^3}{12}\right]_0^2=\frac{16}{8}-\frac{8}{12}=\frac{4}{3}$$

b) $F(x,y)=(y^2-x^2,x)$ le long de l'arc du cercle $x^2+y^2=4$ de (0,2) à (2,0) dans le sens des aiguilles d'une montre.



$$\Rightarrow C(\theta)=\left(2\cos\theta,2\sin\theta\right);\theta:\frac{\pi}{2}\to 0 \Rightarrow C'(\theta)=\left(-2\sin\theta,2\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow F\left(C(\theta)\right)\cdot C'(\theta)=\left(4\sin^2\theta-4\cos^2\theta,2\cos\theta\right).\left(-2\sin\theta,2\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow F\left(C(\theta)\right)\cdot C'(\theta)=-8\sin^3\theta+8\cos^2\theta\sin\theta+4\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-8\sin^3\theta + 8\cos^2\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\right) d\theta = \frac{8}{3} - \pi$$

En effet :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin^3\theta - 8\cos^2\theta\sin\theta - 4\cos^2\theta\right) d\theta = 8A - 8B - 4C$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(1 - \cos^2\theta\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta sin\theta d\theta$$

$$= \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} == 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta\sin\theta\right) d\theta = -\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}}$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta\right) d\theta = \frac{\pi}{4}$$

On peut démontrer que pour tout $(k,n) \in N \times N$

$$\int_0^{k\pi} \cos^2 n\theta d\theta = k\frac{\pi}{2} \; ; \qquad \int_0^{k\frac{\pi}{2}} \cos^2 n\theta d\theta = k\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{k\pi} \sin^2 n\theta d\theta = k\frac{\pi}{2} \; ; \qquad \int_0^{k\frac{\pi}{2}} \sin^2 n\theta d\theta = k\frac{\pi}{4}$$

$$A = \int_0^{k\pi} \left(\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta\right) d\theta = k\pi$$

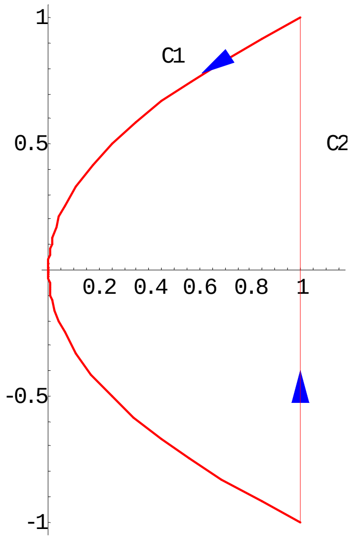
$$B = \int_0^{k\pi} \left(\cos^2 n\theta - \sin^2 n\theta\right) d\theta = \int_0^{k\pi} \left(\cos 2n\theta\right) d\theta = 0$$

A+B $\Rightarrow 2\int_0^{k\pi} \cos^2 n\theta d\theta = k\pi$

A-B $\Rightarrow 2\int_0^{k\pi} \sin^2 n\theta d\theta = k\pi$

---

c) $F(x,y) = (y^2x^2, xy^2)$ le long du chemin fermé formé par la droite x=1 et la parabole $y^2 = x$ dans le sens trigonométrique.



$$\Rightarrow F(x,y) = (y^2x^2, xy^2) \text{ avec } \; y^2 = x$$

$$\Rightarrow \int_a^b Pdx + Qdy = \begin{cases} \text{P et Q composantes de F sur la courbe} \\ dx \text{ et } dy \text{ différentielles de la courbe} \end{cases}$$

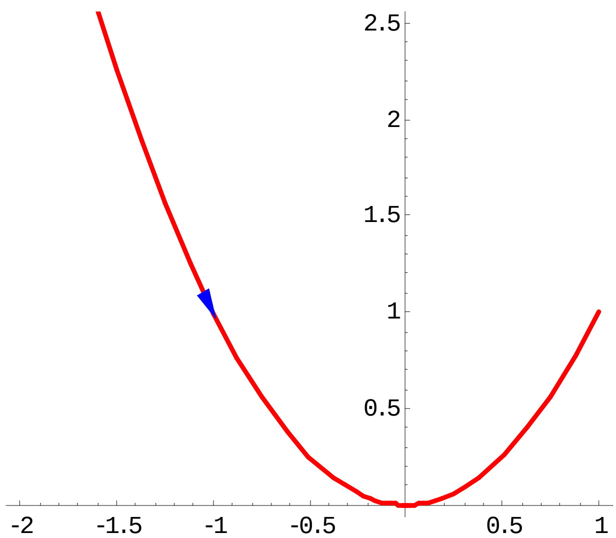
$$\Rightarrow \int_a^b y^2x^2dx + xy^2dy$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_1^{-1} y^2\left(y^2\right)^2 2ydy + y^2y^2dy = -\int_{-1}^{1}\left(2y^7 + y^4\right)dy = -2\int_0^1\left(y^4\right)dy = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \; I_2 = \int_{-1}^{1} y^2dy = 2\int_0^1 y^2dy = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_{23} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

d) $F(x,y) = (x^2 - 2xy,\; y^2 - 2xy)$ le long de $y = x^2$ de (-2,4) à (1,1)



$$\Rightarrow \int_{-2}^{1}\left(x^2-2x^3\right)dx+\left(x^4-2x^3\right)2xdx=\int_{-2}^{1}\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)dx=-\frac{369}{10}$$

e) F(x, y, z)= (x, y, xz- y) le long du segment (0, 0, 0), (1, 2, 4)

$$\Rightarrow C(t)=t(1,2,4)=(t,2t,4t);0\le t\le 1 \Rightarrow C'(t)=(1,2,4)$$

$$\Rightarrow F(C(t))\cdot C'(t)=\left(t,2t,4t^2-t\right).(1,2,4)=5t+16t^2-8t=16t^2-3t$$

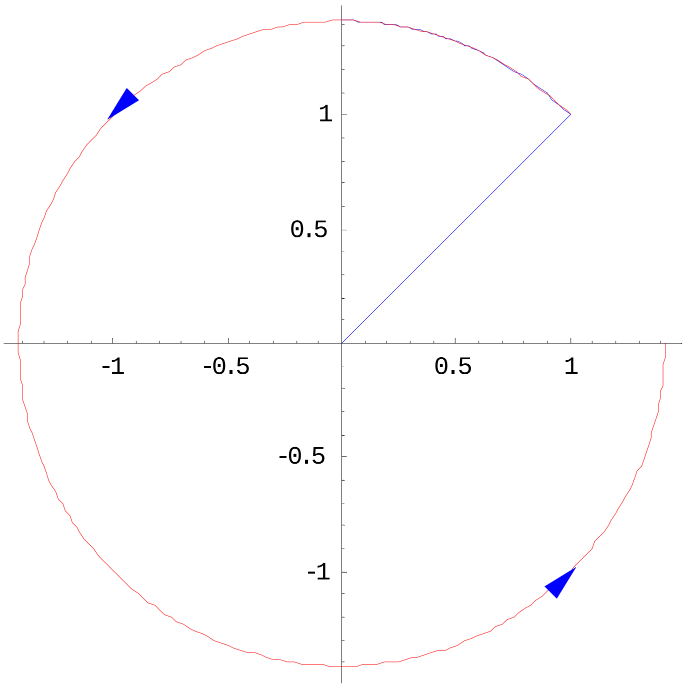
$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1\left(16t^2-3t\right)dt=\frac{23}{6}}$$

2. Même question pour le champ:

$$G(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Corrigé 2

a) dans le sens trigonométrique le long du cercle $x^2+y^2=2$ de (1,1) à ($\sqrt{2}$,0).



$$\int_{(1,1)}^{(0,\sqrt{2})}\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{4}}d\theta=\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{4}$$

b) le long du cercle en entier.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi}$$

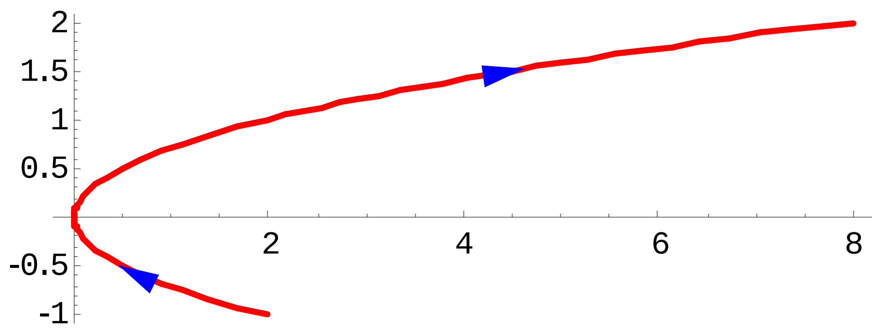
c) le long du cercle $x^2 + y^2 = 1$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi}$$

d) Vérifier que: $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$$

3. Calculer l'intégrale curviligne de ($x\,y$, y) le long de $x = 2y^2$ du point (2, -1) au point (8, 2).

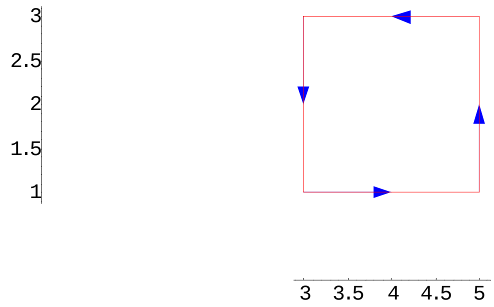


Corrigé 3

$$\int_{(2,-1)}^{(8,2)} xydx + ydy = \int_{-1}^{2} \left(8y^4 + y\right) dy = \left[\frac{8y^5}{5} + \frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{543}{10}$$

4. Même question pour (2xy,-3xy) le long du carré dont les arêtes sont: x =3, x =5, y=1, y=3.

Corrigé 4



$$\int_C 2xydx - 3xydy$$

$$\int_3^5 2xdx - \int_1^3 15ydy + \int_5^3 6xdx - \int_3^1 9ydy = -56$$

---

5. Calculer l'intégrale du champ vectoriel F(x, y, z) = (2*x*, 3*y*, 4*z*) le long de la droite C(t) = (t, t, t) entre (0,0,0) et (1, 1, 1).

Corrigé 5

$$\Rightarrow C(t) = (t,t,t); 0 \le t \le 1 \Rightarrow C'(t) = (1,1,1)$$

$$\Rightarrow F(C(t)) \cdot C'(t) = (2t, 3t, 4t).(1,1,1) = 9t$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1 9tdt = \frac{9}{2}}$$

---

6. Même question pour le champ F(x, y, z) = (y+ z, x+ z, x+ y).

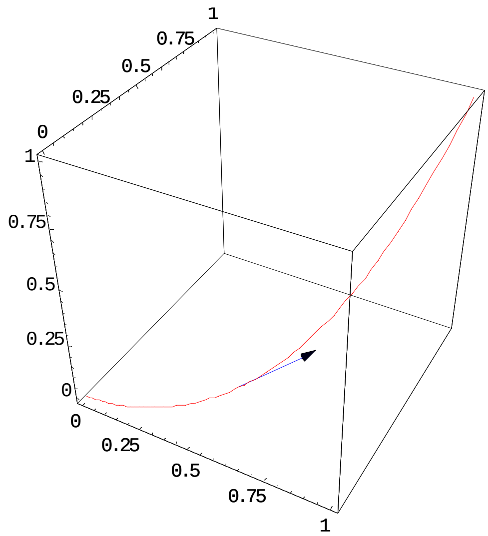
Corrigé 6

$$\Rightarrow C(t) = (t,t,t); 0 \le t \le 1 \Rightarrow C'(t) = (1,1,1)$$

$$\Rightarrow F(C(t)) \cdot C'(t) = (2t, 2t, 2t).(1,1,1) = 6t \Rightarrow \int_0^1 6tdt = 3$$

---

7. Calculer l'intégrale de champ du numéro 6, le long de $C(t) = (t, t^2, t^4)$, les points étant les mêmes. Que peut-on déduire?



Corrigé 7

$$\Rightarrow C(t) = (t, t^2, t^4); 0 \le t \le 1 \Rightarrow C'(t) = (1, 2t, 4t^3)$$

$$\Rightarrow F(C(t)) \cdot C'(t) = (t^2 + t^4, t + t^4, t + t^2).(1, 2t, 4t^3) = 3t^2 + 5t^4 + 6t^5$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (3t^2 + 5t^4 + 6t^5) dt = 3$$

On peut penser alors à un champs conservatif c'est-à-dire qui ne dépend pas du chemin suivi pour aller d'un point à un autre. Pour le vérifier il suffit de vérifier :

- que le rotationnel de ce champ est le vecteur nul $(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (1-1, 1-1, 0-0) = (0,0,0)$
- que le domaine de définition du champ est connexe ici c'est $\mathbb{R}^3$

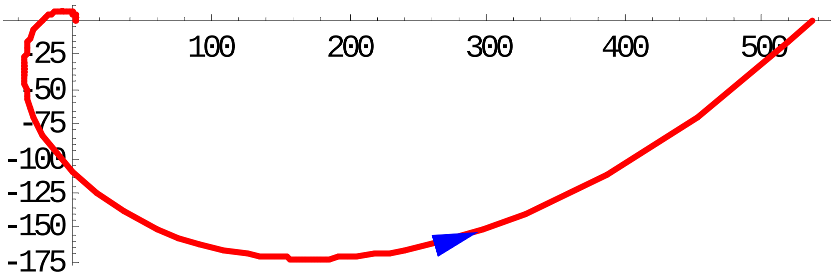
8. Soient P,Q deux points de l'espace à trois dimensions. Montrer que l'intégrale du champ, $F(x,y,z) = (z^2, 2y, 2xz)$ entre P et Q est indépendante du chemin suivi.

Corrigé 8

- $(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (0-0, 2z-2z, 0-0) = (0,0,0)$
- le domaine de définition du champ est $\mathbb{R}^3$

9. Soit $F(x,y)=(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3})$ où $r=\sqrt{x^2+y^2}$ Calculer l'intégrale de F le long de $C(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t)$ entre (1,0) et $(e^{2\pi},0)$.

Corrigé 9



$$\Rightarrow C(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t) \Rightarrow C'(t)=\left(e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\cos t+e^t\sin t\right)$$

$$\begin{aligned}F\left(C(t)\right)\cdot C'(t)&=\left(\frac{e^t\cos t}{e^{3t}},\frac{e^t\sin t}{e^{3t}}\right).\left(e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\cos t+e^t\sin t\right)\\&=\frac{1}{e^t}\left(\cos t,\sin t\right).\left(\cos t-\sin t,\cos t+\sin t\right)\\&=e^t\left(\cos^2 t-\cos t\sin t+\sin t\cos t+\sin^2 t\right)\\&=\frac{1}{e^t}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F\left(C(t)\right)\cdot C'(t)=\frac{1}{e^t}$$

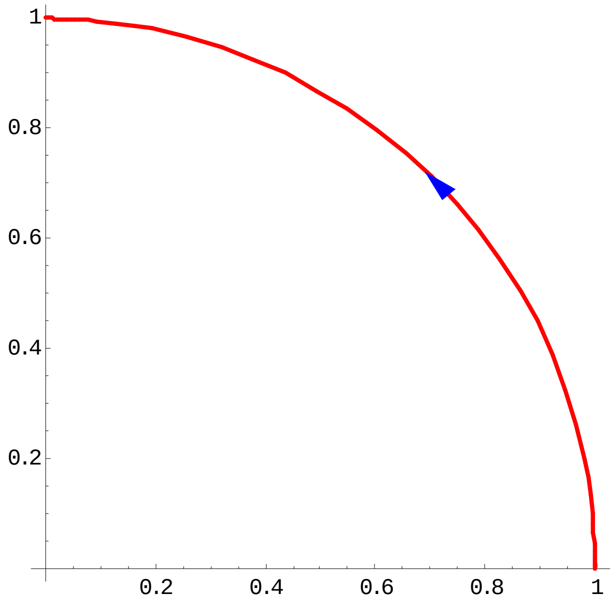
$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^t}dt=1-e^{-2\pi}}$$

10. Calculer l'intégrale du champ:

$$F(x,y)=\left(\frac{x\cos r}{r},\frac{y\cos r}{r}\right)$$

Corrigé 10

a) le long du cercle de rayon 1 dans le sens trigonométrique entre (1,0) et (0,1).



$\Rightarrow C(t)=(\cos t,\sin t) \Rightarrow C'(t)=(-\sin t,\cos t)$

$F\left(C(t)\right)\cdot C'(t)=\left(\cos t\cos 1,\sin t\cos 1\right).\left(-\sin t,\cos t\right)=\left(-\cos 1+\cos 1\right)\sin t\cos t$

$\Rightarrow F\left(C(t)\right)\cdot C'(t)=0$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}(0)\,dt=0$

b) le long du cercle entier .

$\Rightarrow \int_0^{2\pi}(0)\,dt=0$

11. Soit $F(x,y)=\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2},\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$

Corrigé 11

a) Calculer l'intégrale de ce champ le long du cercle de rayon 1 centré à l'origine dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Posons $F(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)+\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=G(x,y)+H(x,y)$

Nous savons que $\int\limits_C G(x,y)=2\pi$

$$\Rightarrow \int\limits_C H(x,y)=\int\limits_C(-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)\,d\theta=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int\limits_C F(x,y)=2\pi}$$

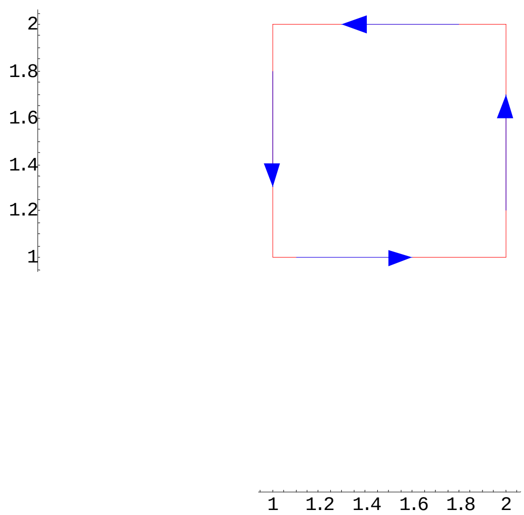
b) Ce champ admet-il une fonction potentielle?.

$\Rightarrow$ Non puisque son intégrale le long d'une courbe fermée n'est pas nulle.

12. Soit $F(x,y)=\left(\dfrac{-y+3x}{x^2+y^2},\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}\right)$

Corrigé 12

a) Peut on dire que F(x, y) admet une fonction potentielle dans le rectangle défini par: 1≤x ≤ 2, et 1 ≤y ≤ 2 ?. Pourquoi?.



$$F(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{3x}{x^2+y^2},\frac{3y}{x^2+y^2}\right)$$
$$=G(x,y)+H(x,y)$$

Nous savons déjà que le champ G dérive d'un potentiel dans tout connexe ne contenant pas le point (0 ,0), or ce rectangle ne contient pas ce point.

Posons $P=\dfrac{3x}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{3y}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{6xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$\Rightarrow$ Le champ H dérive aussi d'un potentiel dans ce rectangle.

$\Rightarrow$ Le champ F dérive aussi d'un potentiel dans ce rectangle.

b) Trouver l'intégrale de F sur le cercle centré à l'origine de rayon 1 orienté dans le sens direct (positif , contraire aux aiguilles d'une montre).

$\Rightarrow$ Nous savons déjà que $\int_C G = 2\pi$

$\Rightarrow$ Pour le champ H

$\Rightarrow C(t)=(\cos t,\sin t) \Rightarrow C'(t)=(\sin t,\cos t)$

$F(C(t))\cdot C'(t)=(3\cos\theta,3\sin\theta).(-\sin t,\cos t)=0 \Rightarrow \int_0^{2\pi}(0)\,dt=0$

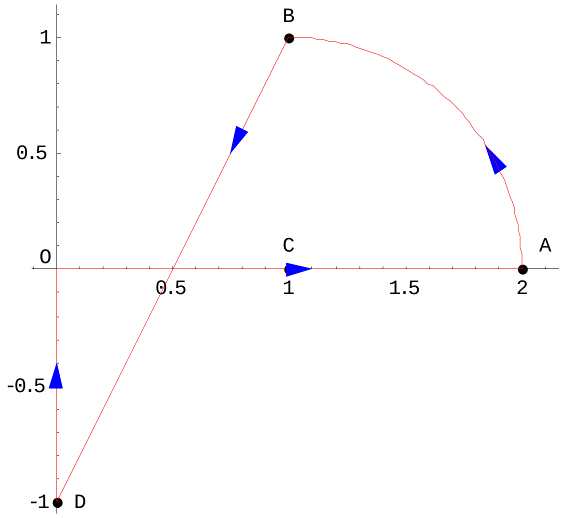
$\Rightarrow \boxed{\int_C F(x,y)=2\pi}$

13. Soit les 4 points, A(2,0); B(1,1); C(1,0); D(0,-1). Γest la juxtaposition de l'arc AB du cercle de centre C et des segments orientés BD, DO, OA. Calculer l'intégrale curviligne:

$$\int_\Gamma (x^4 - x^3e^x - y)dx + (x - yArctgy)dy$$

Indications : On remarque qu'une partie de l'élément différentiel admet une fonction potentielle.

Corrigé 13



Posons $P = x^4 - x^3e^x - y$ et $Q = x - yArctgy$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \begin{Bmatrix} \left(x^4 - x^3e^x\right)'_y = 0 \\ \left(-y\right)'_y = -1 \end{Bmatrix} = -1 \; ; \; \frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{Bmatrix} (x)'_x = 1 \\ \left(-yArctgy\right)'_x = 0 \end{Bmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ Posons $H(x,y) = \left(x^4 - x^3e^x, -yArctgy\right)$ et $J(x,y) = (-y, x)$

$\Rightarrow$ Le champ $H(x,y)$ dérive visiblement d'un potentiel, son intégrale le long de la courbe fermée Γ est nulle. Il este à calculer $\int_\Gamma -ydx + xdy$

$$\Rightarrow \int_\Gamma -ydx + xdy = \int_{\widehat{AB}} + \int_{BD} + \int_{DO} + \int_{Oa} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Calcul de I_1

Equation de l'arc AB :

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow C(t) = \left(2\cos^2\theta, 2\cos\theta\sin\theta\right); \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

$$F\left(C(\theta)\right).C'(\theta) = \left(-2\cos\theta\sin\theta, 2\cos^2\theta\right).\left(-4\cos\theta\sin\theta, 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\right)$$

$$= 8\cos^2\theta\sin^2\theta + 4\cos^4\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 4\sin^2\theta\cos^2\theta + 4\cos^4\theta$$

$$= 4\sin^2\theta\cos^2\theta + 4\cos^2\theta\left(1 - \sin^2\theta\right)$$

$$= 4\sin^2\theta\cos^2\theta + 4\cos^2\theta - 4\cos^2\theta\sin^2\theta = 4\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{\widehat{AB}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\left(1+\cos 2\theta\right) d\theta = 1+\frac{\pi}{2}$$

Calcul de I_2

Equation du segment BD :

$$\Rightarrow C\left(t\right) = B + t\left(D-B\right) = \left(1-t, 1-2t\right); \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow F\left(C\left(t\right)\right).C'\left(t\right) = \left(-1+2t, 1-t\right).\left(-1,-2\right) = 1-2t-2+2t = -1$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{BD} = -\int_0^1 dt = -1$$

Calcul de I_3

Equation du segment DO :

$$\Rightarrow C\left(t\right) = D + t\left(D-O\right) = \left(0,-1-t\right); \quad 0 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow F\left(C\left(t\right)\right).C'\left(t\right) = \left(-1-t, 0\right).\left(0,-1\right) = 0$$

$$I_3 = \int_{DO} = 0$$

Calcul de I_4

On trouve de même :

$$I_4 = \int_{OA} = \int_0^1 \left(0\right) dt = 0$$

Calcul de I_4

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{\pi}{2}$$

14. On considère le champ F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) tel que :

$$P(x,y) = x\ln(x^2+y^2) - y\,; \quad Q(0,y) = y\ln y^2$$

- Déterminer Q(x, y) pour que F(x, y) soit un champ de gradient.
- En déduire l'intégrale curviligne de F(x, y) sur une courbe joignant le point (1,1) au point (x, y)

Corrigé 14

-
$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2+y^2} - 1 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2+y^2} - 1$$
$$\Rightarrow Q(x,y) = \int \frac{\partial Q}{\partial x}dx = y\ln\left(x^2+y^2\right) - x + C$$
$$\Rightarrow Q(0,y) = y\ln y^2 \Rightarrow C = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{Q(x,y) = y\ln\left(x^2+y^2\right) - x}$$
- Posons :
$$\Rightarrow P(x,y) = x\ln(x^2+y^2) - y = \varphi_x^{'}$$
$$\Rightarrow Q(x,y) = y\ln\left(x^2+y^2\right) - x = \varphi_y^{'}$$
$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \int \varphi_y^{'}dy = \int\left(y\ln\left(x^2+y^2\right) - x\right)dy$$

En faisant une intégration par partie : $u = \ln\left(x^2+y^2\right); dv = ydy$

$$\begin{aligned}\int y\ln\left(x^2+y^2\right)dy &= \frac{y^2}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \int \frac{y^2}{2}\times\frac{2y}{x^2+y^2}dy\\ &= \frac{y^2}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \int\left(y - \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)dy\\ &= \frac{y^2}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\\ &= \frac{y^2+x^2}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \frac{y^2}{2}\end{aligned}$$

$$\varphi(x,y) = \frac{y^2+x^2}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \frac{y^2}{2} - xy + \alpha(x)$$

$$\varphi_x^{'}(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} + x\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^3}{x^2+y^2} - y + \alpha'(x) = x\ln(x^2+y^2) - y$$

$$\alpha'(x) = -\frac{xy^2}{x^2+y^2} - \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\alpha(x) = \int \left(-\frac{xy^2}{x^2+y^2} - x + \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right) dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\varphi(x,y) = \frac{y^2+x^2}{2} \ln\left(x^2+y^2\right) - \frac{y^2+x^2}{2} - xy + c$$

$$\int_P^Q F = \varphi(x,y) - \varphi(1,1)$$

$$2 - \frac{x^2}{2} - x\,y - \frac{y^2}{2} - \mathrm{Log}[2] + \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)\,\mathrm{Log}[x^2+y^2]$$

15. Calculer l'intégrale de $w(x,y) = x^2dy + y^2dx$ sur :

L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} = 0$

Corrigé 15

L'équation réduite de l'ellipse est :

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Nous voulons transformer l'ellipse en un cercle.

- Si nous posons :

$$\left\{ \begin{array}{r} \dfrac{x-a}{a} = u \\ \dfrac{y}{b} = v \end{array} \right\} \Rightarrow u^2 + v^2 = 1$$

  l'ellipse est alors transformée en un cercle C((0,0),1).

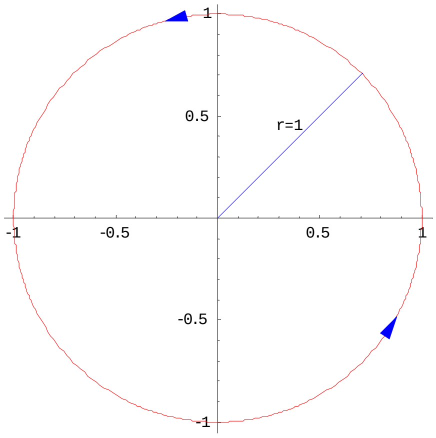
- Si nous posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = u \\ \dfrac{y}{b} = v \end{array} \right\} \Rightarrow (u-1)^2 + v^2 = 1$$

  l'ellipse est alors transformée en un cercle C((1,0),1).

Méthode 1

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{x-a}{a}=u \\ \dfrac{y}{b}=v\end{array}\right\} \Rightarrow u^2+v^2=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}u=rcos\theta \\ v=r\sin\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}u=cos\theta \\ v=\sin\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=acos\theta+a \\ y=b\sin\theta\end{array}\right\}$$



$$C(\theta)=(acos\theta+a, b\sin\theta); \quad 0\le\theta\le 2\pi \;\;;$$

$$C'(\theta)=(-a\sin\theta, b\cos\theta)$$

$$F(x,y)=\left(y^2,x^2\right)$$

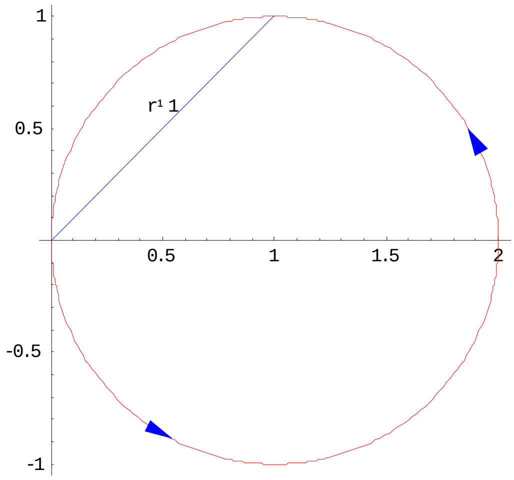
$$F\left(C(\theta)\right)=\left(b^2\sin^2\theta, a^2\left(1+\cos\theta\right)^2\right)$$

$$F\left(C(\theta)\right)\cdot C'(\theta)=-ab^2\sin^3\theta+ba^2\cos\theta\left(1+\cos\theta\right)^2$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-ab^2\sin^3\theta+ba^2\cos\theta\left(1+\cos\theta\right)^2\right)d\theta=2a^2b\pi$$

Méthode 2

$$\left\{\begin{matrix}\frac{x}{a}=u\\ \frac{y}{b}=v\end{matrix}\right\}\Rightarrow (u-1)^2+v^2=1\Rightarrow\left\{\begin{matrix}u=r\cos\theta\\ v=r\sin\theta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{matrix}\right\}$$



Ecrivons l'équation de ce cercle en coordonnées polaires :

$$\Rightarrow \frac{a^2r^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2 t}{b^2}-\frac{2ar\cos t}{a}=0$$

$$\Rightarrow r=2\cos t$$

$$\Rightarrow C(t)=\left(2a\cos^2 t, 2b\cos t\sin t\right);\qquad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow C'(t)=\left(-4a\sin t\cos t, 2b\cos^{t} t-2b\sin^2 t\right)$$

$$\Rightarrow F(x,y)=\left(y^2,x^2\right)$$

$$\Rightarrow F\left(C(t)\right).C'(t)=-16ab^2\cos^3 t\sin^3 t+8a^2b\cos^6 t-8a^2b\cos^4 t\sin^2 t$$

$$\Rightarrow \cos^6 x=\frac{1}{32}\left(10+15\cos(2x)+6\cos(4x)+\cos(6x)\right)$$

$$\Rightarrow \cos^4 t=\frac{1}{8}\left(3+4\cos(2t)+\cos(4t)\right)$$

$$\Rightarrow \cos^3 t=\frac{1}{4}\left(3\cos(t)+\cos(3t)\right)$$

$$\Rightarrow \sin^3 t=\frac{1}{4}\left(3\sin(t)-\sin(3t)\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2t)\right)$$

$$F\left(C(t)\right).C'(t) = \frac{1}{2}ab\left(4a + 7a\cos(2t) + 4a\cos(4t) + a\cos(6t) - 3b\sin(2t) + b\sin(6t)\right)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F\left(C(t)\right).C'(t)\,dt = 2a^2 b\pi$$