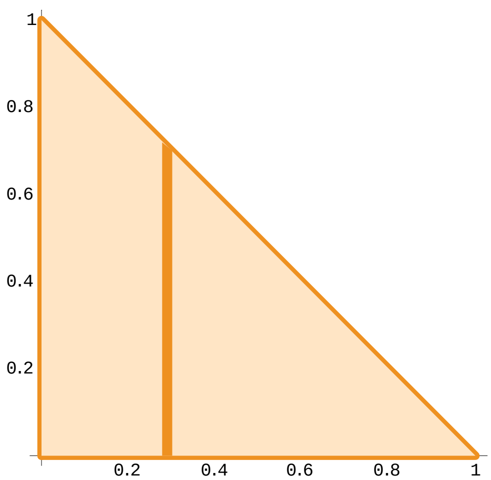
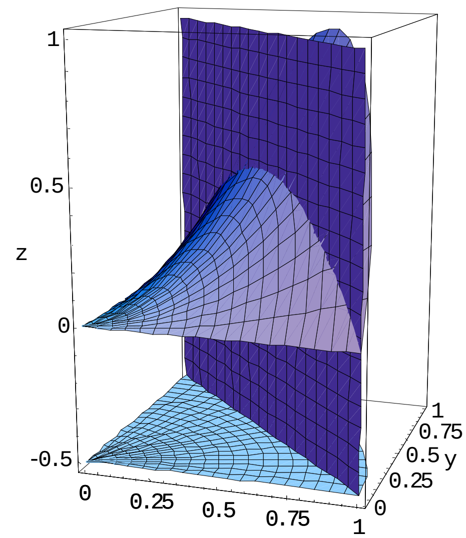
# TD6 – Intégrale Double

1. Calculer les intégrales doubles suivantes:
   a) $\iint_D xy\,dxdy$ où D={ $(x,y)$ / $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$ }

**Corrigé**

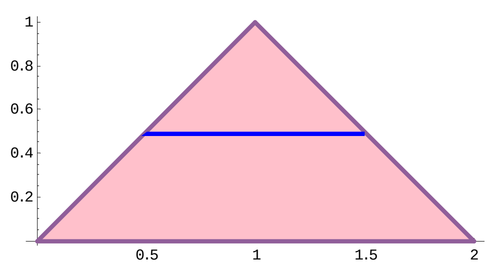
Cette intégrale peut être interprétée comme un volume.

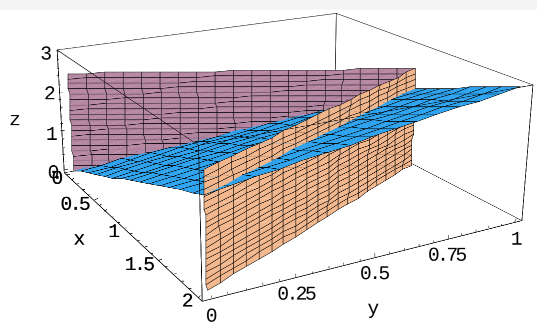



$$\int_0^1\int_0^{1-x} xy\,dydx = \int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y\,dy = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{24}$$

   b) $\iint_D (x+y)\,dxdy$ où D est le triangle de sommets: O(0.0), A(1,1), B(2,0)




$$I = \int_0^1\int_y^{2-y}(x+y)\,dydx = \int_0^1\left(2-2y^2\right)dy = \frac{4}{3}$$

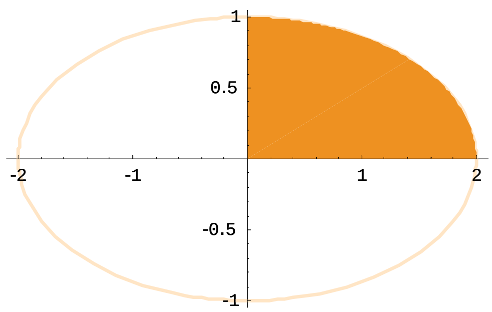
Cette intégrale peut être interprétée comme un volume.

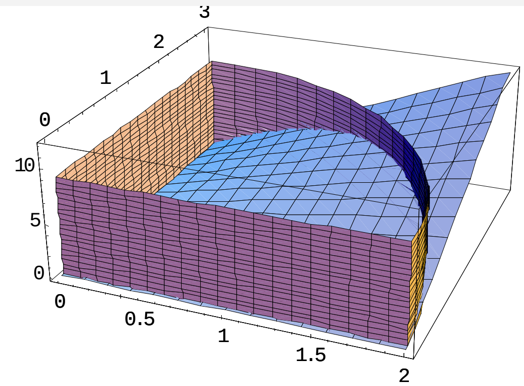
$$I_1 = \int_0^1\int_0^x (x+y)\,dydx = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_1^2\int_0^{2-x}(x+y)\,dydx = \frac{5}{6}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3}$$

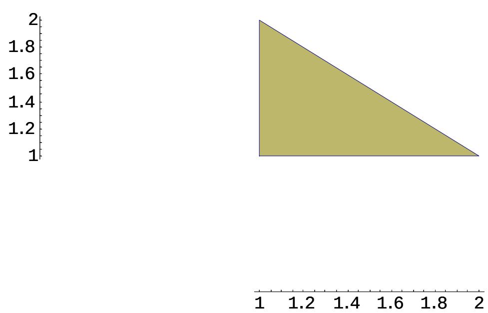
c) $\iint\limits_D xydxdy$ où D est défini par: $x \geq 0,\ y \geq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1 \leq 0$

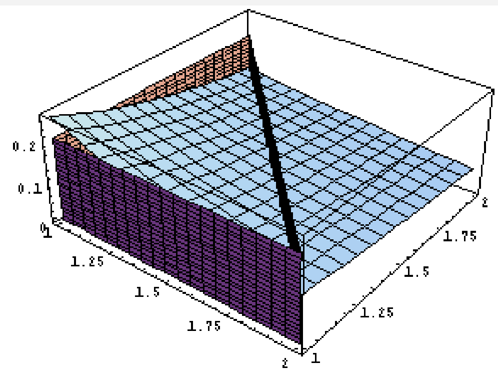



$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 a^2b^2r^3\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{a^2b^2}{8}$$

d) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^2}$ où D est défini par x ≥ 1, y ≥ 1, x+y ≤ 3.



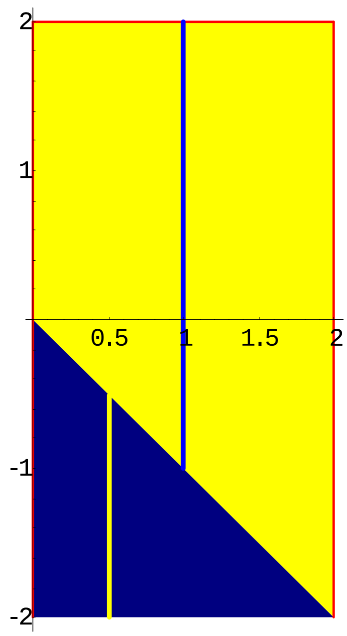




$$\int_1^2\int_1^{3-x}\frac{dydx}{\left(x+y\right)^2}=Log\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}$$

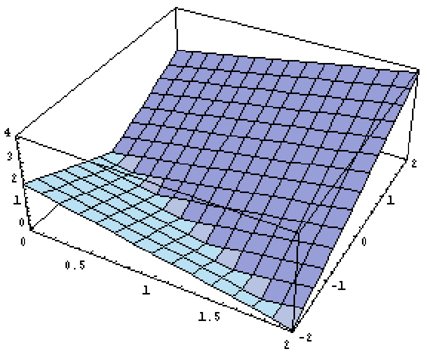
Cette intégrale peut être interprétée comme un volume.

2. Calculer les intégrales suivantes: $\iint_D |x+y|\,dxdy$

   a) avec D défini par: 0 < x < 2 et -2 < y < 2




Cette intégrale peut être interprétée comme un volume.

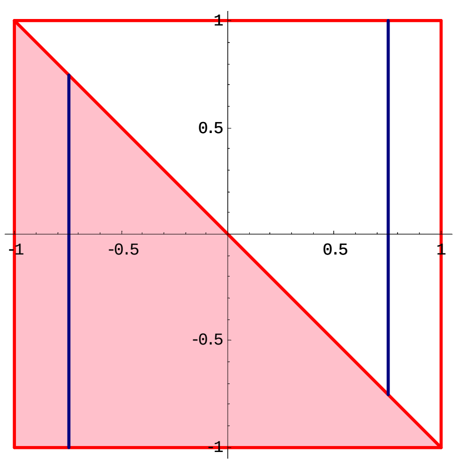


$$\int_0^2 \int_{-2}^{-x} (-x-y)\,dydx = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^2 \int_{-x}^{2} (x+y)\,dydx = \frac{28}{3}$$

$$\int_0^2 \int_{-2}^{-x} (-x-y)\,dydx + \int_0^2 \int_{-x}^{2} (x+y)\,dydx = \frac{32}{3}$$

   b) avec D défini par: $|x| < 1, \quad |y| < 1$




**Méthode 1**

La droite $y = -x$ est un axe de symétrie pour le domaine. En plus si $P(a,b)$ son symétrique P' par rapport à la droite $y = -x$ a pour coordonnées : $P'(-b,-a)$

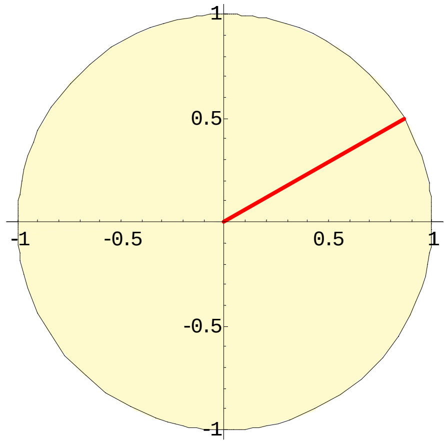
Comme $|a+b| = |-b-a| \Rightarrow f(P) = f(P')| \Rightarrow$ $J = 2J_1$

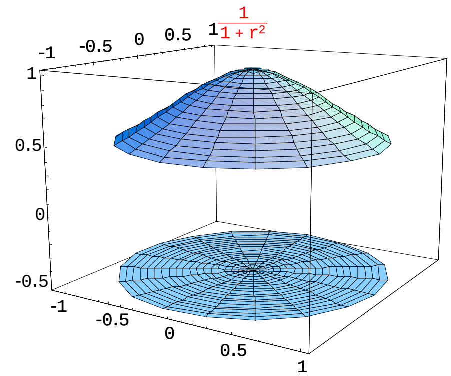
$$J_1 = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{-x} (-x-y)\,dydx = \frac{4}{3} \Rightarrow J = \frac{8}{3}$$

**Méthode 2**

$$J = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{-x} (-x-y)\,dydx + \int_{-1}^{1} \int_{-x}^{1} (x+y)\,dydx = \frac{8}{3}$$

c) $\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ où D est le disque ouvert $x^2+y^2<1$



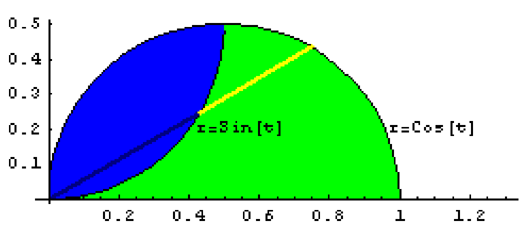



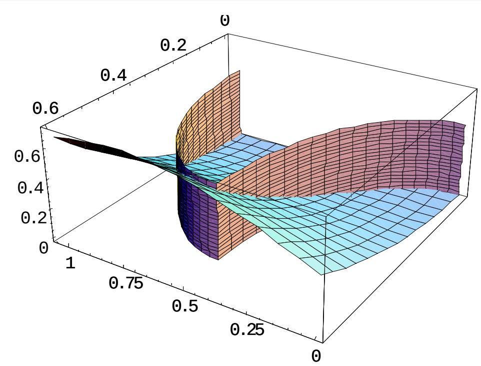

Cette intégrale peut être interprétée comme un volume.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}Log\left(1+r^2\right)\Big]_0^1 = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}Log\left(2\right)d\theta = \pi Log\left(2\right)$$

3. Soit D l'ensemble des couples (x, y) vérifiant :

$x^2+y^2-y>0\,;x^2+y^2-x<0\,;$ y>0 Calculer $\iint_D (x+y)^2dxdy$




Cette intégrale peut être interprétée comme un volume.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} r\left(r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta\right)drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos\theta\sin\theta)\left.\frac{r^4}{4}\right]_{\sin\theta}^{\cos\theta}d\theta$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos\theta\sin\theta)\left(\cos^4\theta-\sin^4\theta\right)d\theta$$

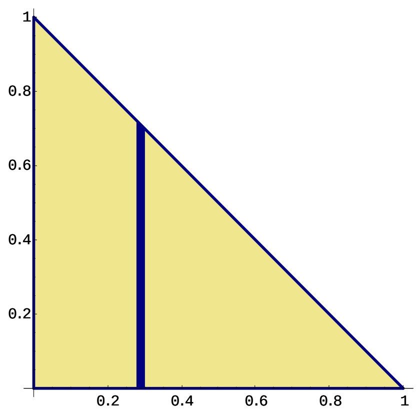
$$I=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos\theta\sin\theta)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta+\sin 2\theta\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}-\frac{\cos 4\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I=\frac{3}{16}$$

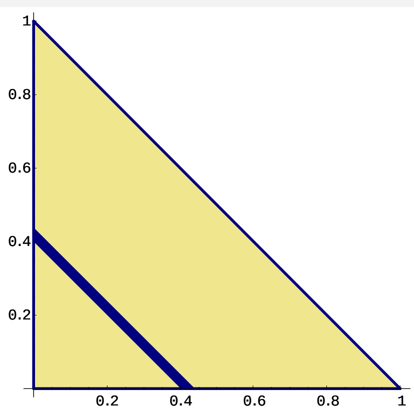
4. Calculer l'intégrale $\iint_D (x+y)dxdy \quad D=\{\ (x,y)\in R^{2+}\ \ /\ \ x+y<1\}$

a) directement




$$\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)dydx=\frac{1}{3}$$

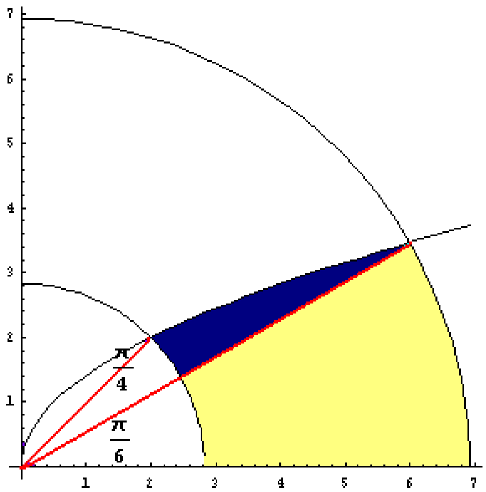
b) En utilisant les courbes de niveau.




$$\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$$

5. Calculer l'intégrale :

$$\iint_D \frac{(2+x)y}{x^2+y^2}\,dxdy;\ D = \{(x,y) \in R^2 \ / \ y > 0;\ y^2 - 2x < 0;\ 8 < x^2 + y^2 < 48\}$$




**Intrsection** de $x^2 + y^2 = 8$ et de $y^2 = 2x$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \{x=-4\};\{x=2\} \Rightarrow$ La valeur $\{x=-4\}$ est à rejetter $\Rightarrow$ $\{x=2\}$

**Intrsection** de $x^2 + y^2 = 48$ et de $y^2 = 2x$

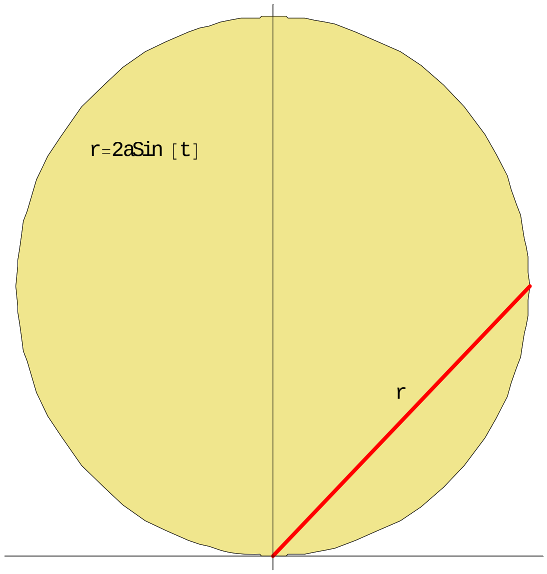
$x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow \{x=-8\};\{x=6\} \Rightarrow$ La valeur $\{x=-8\}$ est à rejetter $\Rightarrow$
$\{x=6\}$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{2\sqrt{2}}^{4\sqrt{3}} (2 + r\cos\theta)\sin\theta drd\theta = -\frac{39}{2} + 2\sqrt{6} - 2\left(-5 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right)$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\sqrt{2}}^{\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}} (2 + r\cos\theta)\sin\theta drd\theta = \frac{11}{2} - 2\sqrt{6} - Log(2) + Log(4)$$

$$I = I_1 + I_2 = -4 - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + Log(2)$$

6. Calculer à l'aide d'une intégrale double, le volume du domaine limité par les surfaces:
$x^2+(y-a)^2=a^2$ ; $x^2+y^2=4az$ ; z = 0

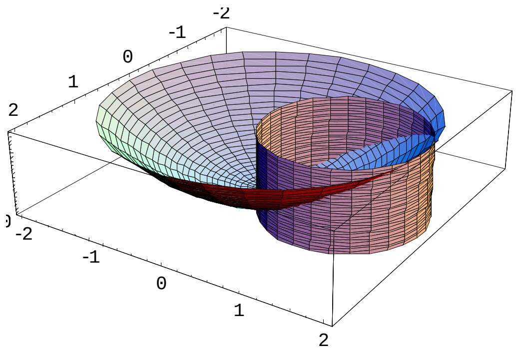


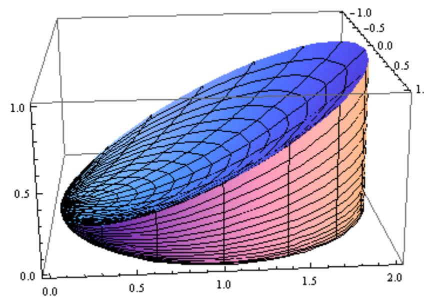

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta}\frac{r^3}{4a}drd\theta$$

$$I=\int_0^{\pi}a^3\sin^4\theta d\theta$$

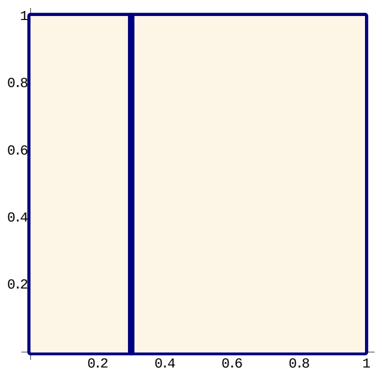
$$I=\frac{a^3}{8}\int_0^{\pi}\left(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right)d\theta$$

$$I=\frac{3a^3\pi}{8}$$





7. Soit P le pavé: 0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1. Calculer sur P l'intégrale double de la fonction
$$f(x,y)=\frac{1}{(1+x+y)^2}$$

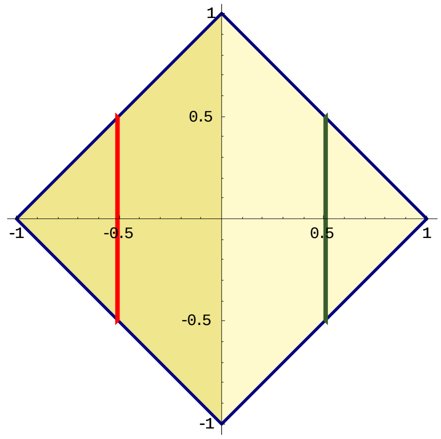


Cette intégrale peut être interprétée comme un volume.

$$\int_0^1\int_0^1\frac{dydx}{(1+x+y)^2}=\mathrm{Log}\left(\frac{4}{3}\right)$$

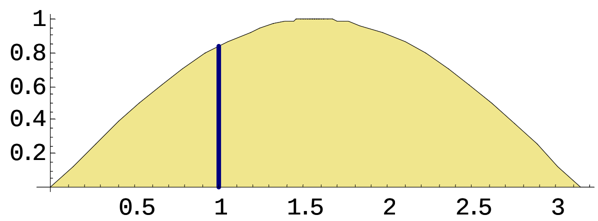
8. Calculer les intégrales doubles des fonctions suivantes:

a) $e^{x+y}$ sur le domaine de $R^2$ défini par: $|x|+|y|\le 1$



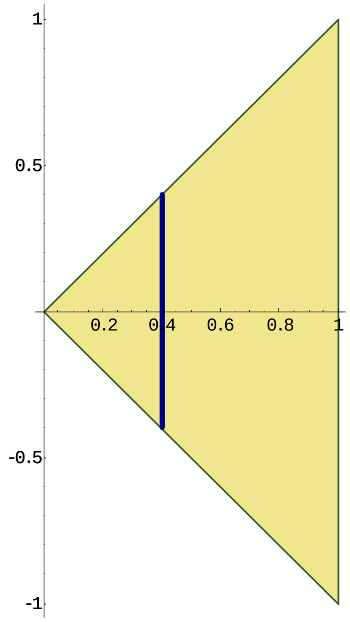

$$\int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{1+x} e^{x+y}\,dydx+\int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}\,dydx=e-\frac{1}{e}$$

b) $x^2-y^2$ sur le domaine de R² défini par la courbe y = sin x pour $0\le x\le \pi$.




$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\sin x}\left(x^2-y^2\right)dydx=\pi^2-\frac{40}{9}$$

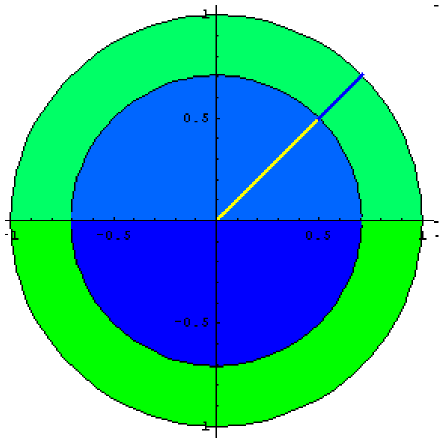
c) $x^2-y^2$ sur le domaine de R² défini par les inégalités: $0\le x\le 1 \quad x^2-y^2\ge 0$




$$\int_{0}^{1}\int_{-x}^{x}\left(x^2-y^2\right)dydx=\frac{1}{3}$$

$0\le x\le 1 \qquad -x\le y\le x$

9. Calculer l'intégrale double de la fonction $f(x,y)=\frac{1}{r^n}$, où $r=\sqrt{x^2+y^2}$ *et* $n \in N^*$ sur le domaine compris entre les cercles centrés à l'origine et de rayons respectifs a et b tel que : $0 < a < b$.

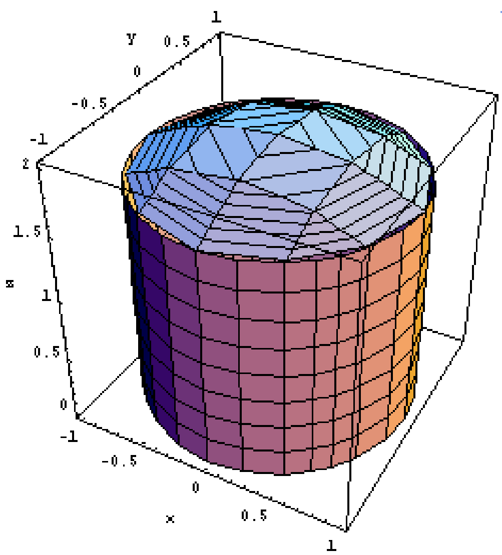


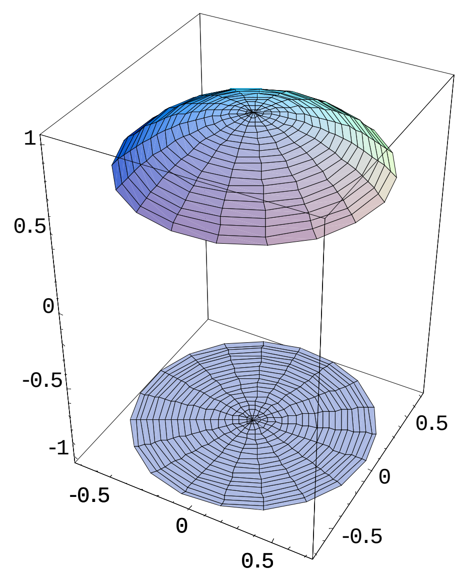
$$\int_0^{2\pi}\int_a^b r\times\frac{1}{r}\,drd\theta = 2(b-a)\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b r\times\frac{1}{r^2}\,drd\theta = 2\pi\left(Log(b)-Log(a)\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b r\times\frac{1}{r^n}\,drd\theta = 2\pi\frac{a^{2-n}-b^{2-n}}{n-2}$$

10. Calculer le volume cylindrique ayant pour section le cercle de rayon 1, centré à l'origine, et borné d'en haut et d'en bas par la sphère de rayon 2, centrée à l'origine.

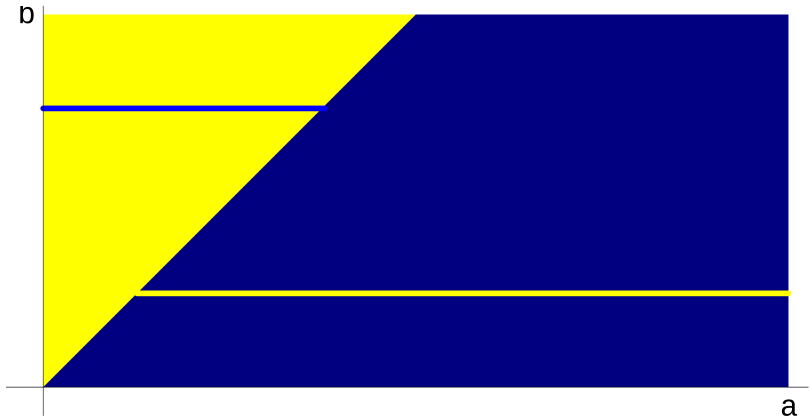


$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\,drdt = \frac{4}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)\pi$$

11. Soit (a,b)∈R² . Calculer f(a, b) lorsque :

$$f(a,b)=\iint_D |x-y|dxdy \quad D=\{(x,y)\in R^2 \ / \ 0\le x\le a; 0\le y\le b\}$$




Dans le cas où a > b :

$$f(a,b)=\int_0^b\int_0^x (x-y)dxdy+\int_0^b\int_x^a (y-x)dxdy=\frac{1}{6}b\left(3a^2-3ab+2b^2\right)$$

12. Soient a et b deux nombres réels tels que: 0 < a < b. Soit:

$$D = \{(x,y) \in R^2 / a \le xy \le b; x \le y; y^2 - x^2 \le 1\}$$

On effectue le changement de variables :

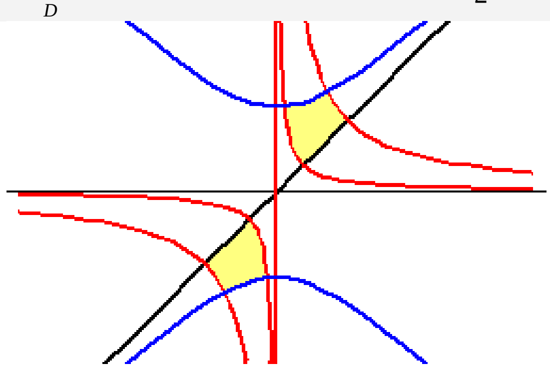
$$u = xy, v = y^2 - x^2.$$

On admet que le produit des jacobiens:

$$.\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \times \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1$$

Calculer:

$$\iint_D (y^2 - x^2)(y^2 + x^2)\,dxdy \text{ (rép. } \frac{b-a}{2}\text{)}$$



$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x v'_y - u'_y v'_x = 2y^2 + 2x^2 \Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

$$a \le xy \le b \Rightarrow a \le u \le b$$

$$y^2 - x^2 \le 1 \Rightarrow v \le 1$$

$$\iint_D (y^2 - x^2)(y^2 + x^2)\,dxdy = 2\int_a^b \int_0^1 \frac{v}{2}\,dvdu = \frac{b-a}{2}$$