T.D. 7 – Théorème de Green

1. Utiliser le théorème de Green pour calculer l'intégrale:

$$\int_{C^+} y^2 dx + x dy$$

où C est la courbe suivante:

Corrigé 1

a) le carré de sommets: (0,0), (2,0), (2,2), (0,2)

Le carré est une courbe fermée et les composantes $P(x,y) = y^2$ et $Q(x,y) = x$ sont de classe C¹ à l'interieur du carré. On peut donc appliquer le Théorème de Green. Notons A l'intérieur de ce carré.

$$I = \int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$I = \iint_A (1-2y)\, dydx = \int_0^2 \int_0^2 (1-2y)\, dydx = -4$$

b) le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

Pour les mêmes raisons que précédement on peut appliquer le théorème de Green.

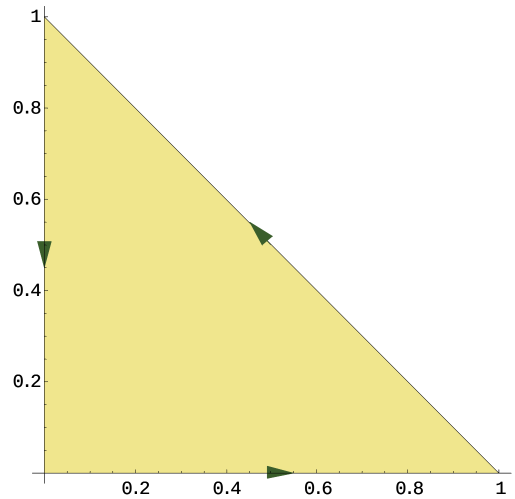
$$I = \iint_A (1-2y)\, dydx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-2r\sin\theta)\, rdrd\theta = \pi$$

2. Utiliser la formule de Green pour calculer l'intégrale:

$$\int_{C^+} y^2 dx - x dy$$

dans le sens direct sur le triangle de sommets: (0,0), (0,1), (1,0).

Corrigé 2



Le triangle est une courbe fermée et les composantes $P(x,y)=y^2$ et $Q(x,y)=-x$ sont de classe C¹ sur le triangle. On peut donc appliquer le Théorème de Green. Notons A l'intérieur de ce triangle.

$$I=\int_{C^+} Pdx+Qdy=\iint_A\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$I=\iint_A(-1-2y)\,dydx=\int_0^1\int_0^{1-x}(-1-2y)\,dydx=-\frac{5}{6}$$

---

3. Soit C la courbe définie par: y = sin x et y = sin 2x, pour 0 < x<π/3, et orientée dans le sens direct. Calculer:

$$\int_C (1+y^2)dx+ydy$$

Corrigé 3

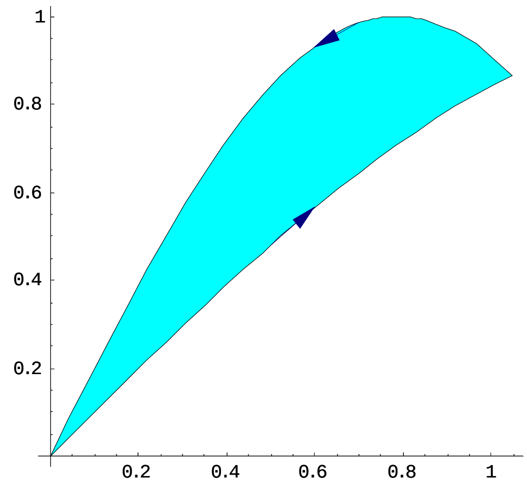


Figure 1A changer le sens des arrow

a) Directement

$$A=\int_C (1+y^2)dx+ydy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\sin^2 x\right)dx+\left(\sin x\right)\cos x dx$$

$$A=\frac{\pi}{3}+\left[\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$B=\int_C (1+y^2)dx+ydy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(1+\sin^2 2x\right)dx+\left(\sin 2x\right)2\cos 2x dx$$

$$B=-\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{2} \qquad\qquad \Rightarrow \quad I=A+B=-\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

b) en utilisant la formule de Green.

Pour les mêmes raisons que précédement on peut appliquer le théorème de Green.

$$I=\int_{C^+} Pdx+Qdy=\iint_A\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\Rightarrow \quad I=\int_0^{\pi/3}\int_{\sin x}^{\sin 2x}-2ydydx=-\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

---

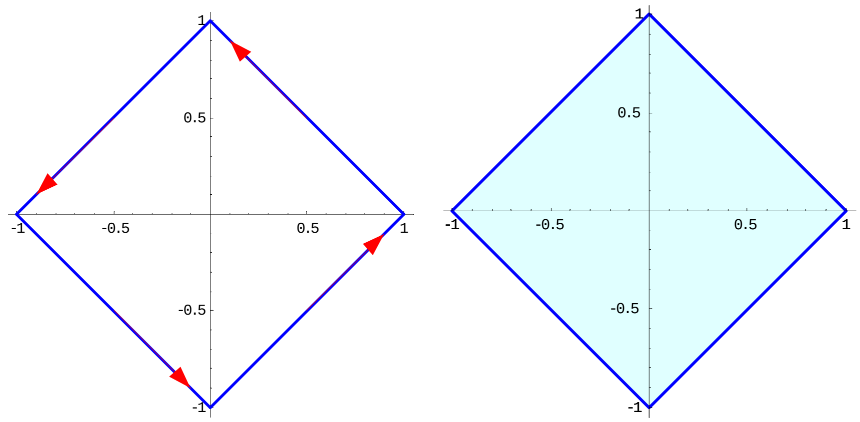
4. Calculer l'intégrale:

$$\int_C ydx + x^2 dy$$

sur les chemins suivants:

Corrigé 4

a) les droites joignant les points: (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)



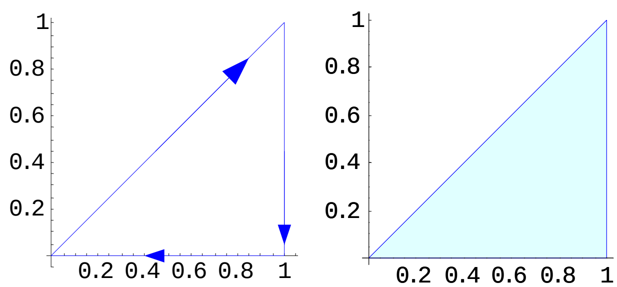
Pour les mêmes raisons que précédement on peut appliquer le théorème de Green.

$$I = \int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$I = \int_C ydx + x^2 dy = \int_{-1}^{0} \int_{-1-x}^{1+x} (2x-1)\, dydx + \int_{0}^{1} \int_{-1+x}^{1-x} (2x-1)\, dydx = -2$$

b) les droites joignant les points: (0,0),(1,1),(1,0)

Si C est la courbe joignant ces segments, l'orientation $(0,0)\rightarrow(1,1)\rightarrow(1,0)\rightarrow(0,0)$ est dans le sens indirect. Pour appliquer la formule de Green il faut adopter l'orientation inverse.



$$J = \int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$J = \int_C y dx + x^2 dy = \int_0^1 \int_0^x (2x-1) dy dx = \frac{1}{6}$$

$$I = -J = -\frac{1}{6}$$

---

5. Soit C une courbe fermée orientée directement. Soit A son intérieur .

Montrer que:

Corrigé 5

a) $aire(A) = \frac{1}{2} \int_{C^+} -ydx+xdy$

$$aire(A) = \iint_A dxdy = \frac{1}{2}\iint_A \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dxdy = \frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

b) $aire(A) = \int_{C^+} xdy$

$$aire(A) = \iint_A dxdy = \iint_A \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(0)}{\partial y}\right) dxdy = \int_C xdy$$

c) si (C) est définie en coordonnées polaires par $r = r(\theta)$ alors :

$$aire(A) = \frac{1}{2}\int_{(C)} r^2(\theta) d\theta$$

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \Rightarrow dx = \left(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta\right) d\theta$$

$$y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \Rightarrow dy = \left(r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta\right) d\theta$$

$$aire(A) = \frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

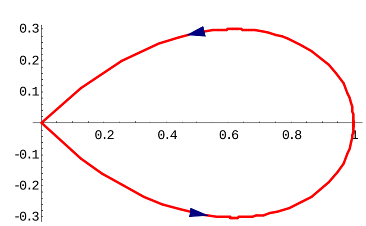
$$= \frac{1}{2}\int_C -r(\theta)\sin\theta\left(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta\right) d\theta$$

$$+\frac{1}{2}\int_C r(\theta)\cos\theta\left(r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta\right) d\theta$$

$$aire(A) = \frac{1}{2}\int_{(C)} r^2(\theta)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{(C)} r^2(\theta) d\theta$$

d) En déduire l'aire de la boucle de la strophoïde droite :

$$r(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le +\frac{\pi}{4}$$



$$A = \frac{1}{2}\int_{(C)} r^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^2 2\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-4\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sin^2\theta d\theta = tg\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$A = 2 - \frac{\pi}{2}$$

---

6. Soit f une fonction harmonique c.à.d. dont le Laplacien est nul. Montrer que si A est l'intérieur d'une courbe fermée C on a : $\int_{C^+}\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0$

Corrigé 6

Une fonction harmonique est une fonction de classe C^1. A l'intérieur d'une courbe fermée C on peut lui appliquer le théorème de Green.

f harmonique $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

En posant $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_{C^+}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy &= \iint_A\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \\
&= \int_{C^+} Pdx + Qdy \\
&= \int_{C^+} -\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial\, x}dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

---

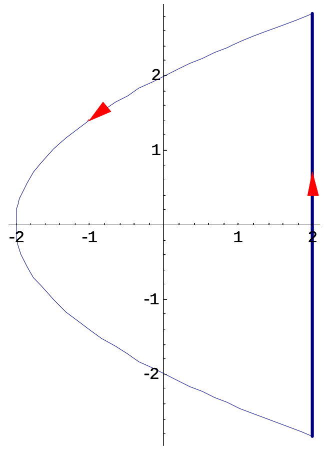
7. Calculer l'intégrale:

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

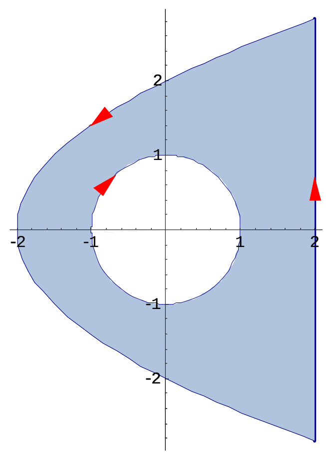
où C est l'un des chemins suivants:

Corrigé 7

a) la courbe formée par $y^2 = 2(x+2)$ et x = 2 orientée directement.



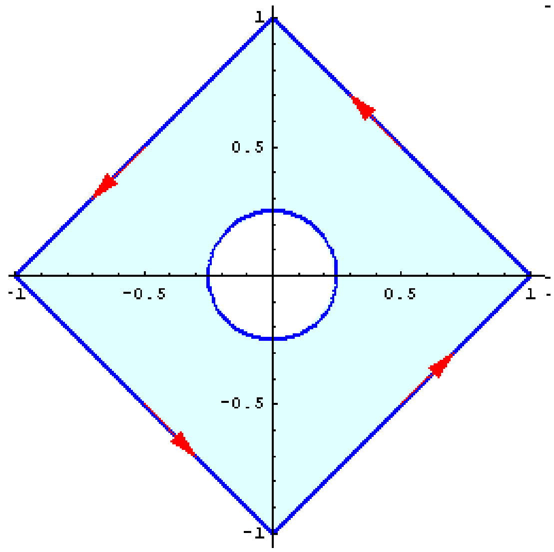
Soit A l'intérieur de la courbe C. Comme le point (0,0) appartient à A on ne peut appliquer le théorème de Green. On considère pour cela A duquel on enlève le disque centré à l'origine et de rayon 1.



Posons $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$I = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

b) le carré dont les sommets sont: (1.0), (0,1), (-1,0), (0,-1), orienté directement.



Pour les mêmes raisons que précédemment $I = 2\pi$

---

8. Soit F(x,y)=(y,-x). Soit C le cercle de rayon 1 centré à l'origine, orienté directement. Montrer que:

$$\int_C F.nds = 0$$

Corrigé 8

Nous savons que

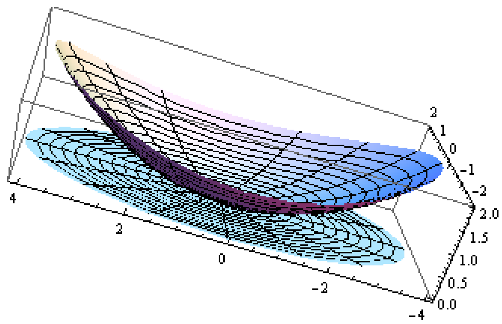
$$\iint_A divFdxdy = \int_C F.nds$$

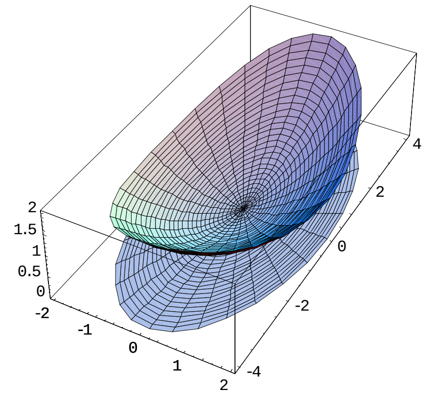
Or $divF = \dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial(-x)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \int_C F.nds = 0$

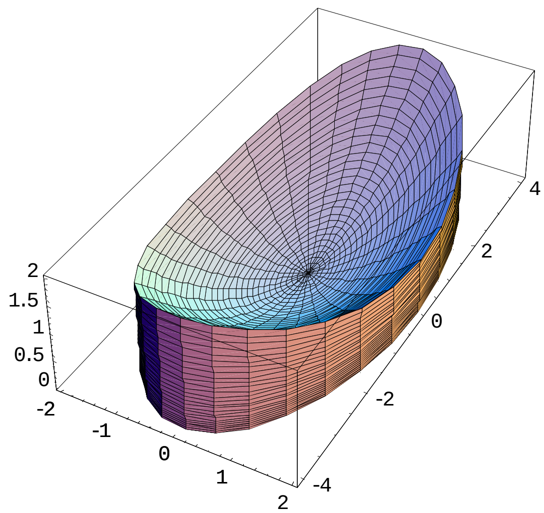
---

9. Calculer le volume limité par le plan des (x,y), la paraboloïde elliptique:

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad p>0,\ q>0 \quad et \quad le\ cylindre\ elliptique \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$







Corrigé 9

Par un calcul direct d'intégrale double.

$$V = \iint_D \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dxdy \quad \text{avec} \quad D = \left\{ (x,y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

On fait un changement en coordonnées elliptiques :

$$x = ar\cos\theta; \quad y = br\sin\theta; \quad J = abr$$

$$\Rightarrow \; V = \iint_{D^*} \left(\frac{a^2 r^2 \cos^2\theta}{2p} + \frac{b^2 r^2 \sin^2\theta}{2q} \right) abrdrd\theta$$

avec $D^* = \left\{ (r,\theta) / (0 \leq r \leq 1); (0 \leq \theta \leq 2\pi) \right\}$

$$V = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\frac{a^2 r^2 \cos^2\theta}{2p} + \frac{b^2 r^2 \sin^2\theta}{2q} \right) r dr$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{ab}{8}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 \cos^2\theta}{p} + \frac{b^2 \sin^2\theta}{q} \right) d\theta$$

$$= \frac{ab\pi}{8}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right)$$

En appliquant la formule de Green.(Ce qui peut se faire de plusieurs façons).

$$V = \iint_D \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dxdy$$

En posant $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2}{2q} \Rightarrow Q = \frac{y^2 x}{2q}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2}{2p} \Rightarrow P = -\frac{x^2 y}{2p}$

$$V = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_C -\frac{x^2 y}{2p} dx + \frac{y^2 x}{2q} dy$$

$$V = \left(\int_0^{2\pi} -\frac{a^2 b \sin\theta \cos^2\theta}{2p}(-a\sin\theta) + \frac{b^2 \sin^2\theta a \cos\theta}{2q}(b\cos\theta) \right) d\theta$$

$$V = \left(\int_0^{2\pi} \frac{a^3 b \sin^2\theta \cos^2\theta}{2p} + \frac{ab^3 \sin^2\theta \cos^2\theta}{2q} \right) d\theta$$

$$V = \left(\int_0^{2\pi} \frac{a^3 b \sin^2 2\theta}{8p} + \frac{ab^3 \sin^2\theta}{8q} \right) d\theta$$

$$V = \frac{a^3 b\pi}{8p} + \frac{ab^3\pi}{8q} = \frac{ab\pi}{8}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right)$$

---

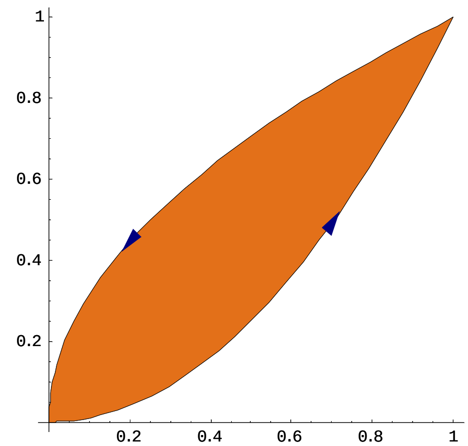
10. Calculer l'intégrale curviligne:

$$\int_C \left(2xy - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$$

où C est la courbe fermée définie par :y = x² et x = y².

Corrigé 10

a) Directement.



$$I = \int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

$$I = \int_0^1 (2x^3 - x^2)dx + 2(x + x^4)xdx + \int_1^0 \left(2y^3 - y^4\right)2ydy + \left(y^2 + y^2\right)dy$$

$$I = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{6}\right) - \left(\frac{17}{15}\right) = \frac{1}{30}$$

b) En appliquant la formule de Green (les conditions de ce théorème étant évidement vérifiées)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2x$$

$$I = \int_0^1 (1-2x)\,dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (1-2x)\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{1}{30}$$

---

11. Soit les intégrales : $I(n) = \int_0^{\pi/4} \cos^n \theta \, d\theta$; $J(n) = \int_0^{\pi/4} \sin^n \theta \, d\theta$

a) Montrer que: $nI(n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + (n\text{-}1)I(n\text{-}2)$ et $nJ(n) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + (n\text{-}1)J(n\text{-}2)$

$$I(n) = \int_0^{\pi/4} \cos^{n-2}\theta\left(1 - \sin^2\theta\right) d\theta = I(n-2) - \int_0^{\pi/4} \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta \, d\theta$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \underbrace{\sin\theta}_{u} \underbrace{\cos^{n-2}\theta \sin\theta d\theta}_{dv}$$

$$= \left[-\sin\theta \frac{\cos^{n-1}\theta}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^n\theta}{n-1} \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + \frac{1}{n-1} I(n)$$

$$\Rightarrow \; I(n) = I(n-2) + \frac{1}{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - \frac{1}{n-1} I(n)$$

$$\Rightarrow \; (n-1) I(n) = (n-1) I(n-2) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - I(n)$$

$$\Rightarrow \; I(n) = (n-1) I(n-2) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad \textbf{c.q.f.d.}$$

On procède de la même manière pour J(n).

b) En déduire les valeurs de I(n) et J(n) pour tout n de l'ensemble {0, 2, 4, 6, 8}.

$$nI(n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + (n\text{-}1)I(n\text{-}2)$$

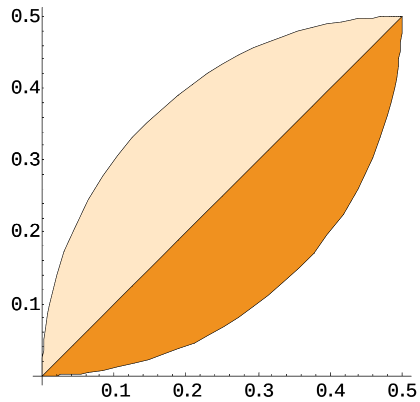
$$I(0) = \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad 2I(2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \; I(2) = \frac{1}{2^2} + \frac{\pi}{2^3}$$

$$\Rightarrow \; 4I(4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2^2} + \frac{\pi}{2^3}\right) \; \Rightarrow \; I(4) = \frac{1}{2^2} + \frac{3\pi}{2^5}$$

$\Rightarrow$ etc.

c) Soit D le domaine du plan défini par :

$$x^2 + y^2 - x \le 0, \;\; x^2 + y^2 - y \le 0, \;\; y \ge 0$$



i) Calculer $\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{D}} (x^2 + xy)dxdy$

$$x^2 + y^2 - x \le 0 \Rightarrow r \le \cos\theta$$

$$x^2 + y^2 - y \le 0 \Rightarrow r \le \sin\theta$$

$$y \ge 0 \Rightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin\theta} \left(r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta\right) r dr d\theta = \frac{\pi}{256}$$

$$B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \left(r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta\right) r dr d\theta = \frac{5}{768}(3\pi - 8)$$

$$A + B = \frac{1}{384}(9\pi - 20)$$

ii) Calculer l'intégrale curviligne: $J = \int_{C^+} \frac{-xy^2}{2}dx + \frac{x^3}{3}dy$ le long de la courbe C limitant D.

$$C(\theta) = \left(\cos\theta\sin\theta, \sin^2\theta\right) \;\Rightarrow\; C'(\theta) = \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta, 2\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$F\left(C(\theta)\right) = \left(-\frac{1}{2}\cos\theta\sin^5\theta -, \frac{1}{3}\cos^3\theta\sin^3\theta\right)$$

$$F\left(C(\theta)\right)\cdot C'(\theta) = \frac{2}{3}\cos^4\theta\sin^4\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin^5\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} F\left(C(\theta)\right)\cdot C'(\theta)d\theta = \frac{1}{768}(3\pi - 2)$$

$$C(\theta) = \left(\cos^2\theta, \cos\theta\sin\theta\right) \;\Rightarrow\; C'(\theta) = \left(-2\cos\theta\sin\theta, \cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$F\left(C(\theta)\right) = \left(-\frac{1}{2}\cos^4\theta\sin^2\theta, \frac{\cos^6\theta}{3}\right)$$

$$F(C(\theta))\cdot C'(\theta)=\cos^5\theta\sin^3\theta+\frac{1}{3}\cos^6\theta\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$$

$$B=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}F(C(\theta))\cdot C'(\theta)\,d\theta=\frac{1}{768}(15\pi-38)$$

$$A+B=\frac{1}{384}(9\pi-20)$$

iii) En appliquant la formule de Green nous retrouvons

$$\mathrm{I}=\iint_{\mathrm{D}}(x^2+xy)dxdy$$

Centre d'inertie d'une plaque plane

Le centre d'inertie d'une plaque plane (D,ρ) de R^2 est le point G de R^2 défini par :

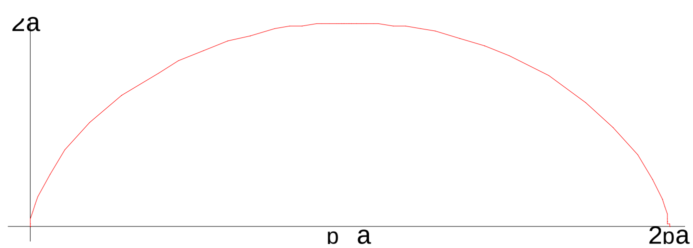
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1}{m}\displaystyle\iint_D x\rho(x,y)dxdy \\ y_G=\dfrac{1}{m}\displaystyle\iint_D y\rho(x,y)dxdy \end{cases}$$

où (x,y) décrit D et m la masse de (D,ρ).

Exemple

Dterminer le centre d'inertie G de la plaque homogène (D,ρ) de R^2 limitée par l'axe x'Ox et l'arche de cycloïde définie par

$$x=a(t-\sin t);y=a(1-\cos t);0\le t\le 2\pi;a>0$$



En utilisant la formule de Green dans les calculs :

$$m=\iint_D \rho dxdy=-\rho\int_C yds=-\rho\left(\int_0^{2\pi a}0dx+\int_{2\pi}^{0}a^2(1-\cos t)^2\,dt\right)=3\pi\rho a^2$$

Par raison de symétrie $x_G=\pi a$

$$y_G = \iint_D \rho y dx dy = -\rho \int_C \frac{y^2}{2} dx = \frac{\rho}{2}\left(\int_0^{2\pi} a^3 (1-\cos t)^3 \, dt\right)$$

$$= \frac{\rho a^3}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt$$

$$= \frac{5}{2} \pi \rho a^3$$